Vorlesung *Statistik 1*
Wintersemester 2015/16
Ruprecht-Karls-Universität Heidelberg

Prof. Dr. Jan JOHANNES

9. Übungsblatt

Aufgabe 1. Für festes $\lambda > 0$ sei $\mathcal{P}_\Theta = \{P_\theta \,|\, \theta \in \Theta = \mathbb{R}\}$ die Familie geshifteter Exponentialverteilungen mit Dichten $f_\theta(x) = \lambda \exp\big(-\lambda(x-\theta)\big)\mathbb{1}_{(\theta,\infty)}(x)$, $x \in \mathbb{R}$.

(i) Zeigen Sie, dass $T(X) = \min_{1\leqslant i\leqslant n} X_i$ erschöpfend und vollständig für $\mathcal{P}_\Theta^{\otimes n}$ ist.

(ii) Ermitteln Sie den besten translations-invarianten Schätzer bezüglich
  (a) der quadratischen Verlustfunktion $\nu(\theta, e) = (\theta - e)^2$ und
  (b) der absoluten Verlustfunktion $\nu(\theta, e) = |\theta - e|$
  unter Verwendung des Satzes §3.7.4.

(4 Punkte)

Aufgabe 2. Es sei $\mathcal{P}_\mathbb{R}^{\otimes n}$ eine Lokations-Familie mit Likelihood-Funktion $L(\theta, x) = \prod_{i=1}^n f(x_i - \theta)$, $x \in \mathbb{R}^n$, $\theta \in \mathbb{R}$, bezüglich einer Lebesguedichte $f : \mathbb{R} \to [0, \infty)$. Zeigen Sie die $\mathcal{L}^2$-Differenzierbarkeit der Verteilungsfamilie $\mathcal{P}_\Theta^{\otimes n}$, wenn $f \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$, $f > 0$ und $\int |f'(x)|^2 \{f(x)\}^{-1} dx < \infty$ gilt, und bestimmen Sie die Fisher-Information.

Können Sie die Bedingungen so abschwächen, dass auch die $\mathcal{L}^2$-Differenzierbarkeit im Fall der Laplace-Verteilung $f(x) = \frac{1}{2}\exp(-|x|/2)$ folgt?

(4 Punkte)

Aufgabe 3. Für zwei Wahrscheinlichkeitsmaße P, Q auf dem Raum $(\mathcal{X}, \mathscr{A})$ bezeichnet

$$H^2(P,Q) := \int_\mathcal{X} \Big(\sqrt{p(x)} - \sqrt{q(x)}\Big)^2 \mu(dx)$$

den quadrierten *Hellinger-Abstand*, wobei μ ein P und Q dominierendes Maß ist (z.Bsp. $\mu = P + Q$), und p, q die entsprechenden μ-Dichten bezeichnet. Zeigen Sie:

(i) Der Hellinger-Abstand H ist unabhängig vom dominierenden Maß μ und definiert eine Metrik.

(ii) Es gilt $H^2(P,Q) = 2 - 2\int_\mathcal{X} \sqrt{p(x)}\sqrt{q(x)}\mu(dx) \in [0, 2]$.

(iii) Für Produktmaße $P = \bigotimes_{i=1}^n P_i$, $Q = \bigotimes_{i=1}^n Q_i$ gilt

$$H^2(P,Q) = 2\big\{1 - \prod_{i=1}^n \big(1 - \frac{1}{2}H^2(P_i, Q_i)\big)\big\} \leqslant \sum_{i=1}^n H^2(P_i, Q_i)$$

(4 Punkte)

Aufgabe 4. Für zwei Wahrscheinlichkeitsmaße P, Q auf dem Raum $(\mathcal{X}, \mathscr{A})$ bezeichnet

$$\|P - Q\|_{TV} := \sup_{A \in \mathscr{A}} |P(A) - Q(A)|$$

den *Totalvariations-Abstand*. Weisen Sie die Ungleichung von Le Cam nach

$$\frac{1}{2} H^2(P, Q) \leqslant \|P - Q\|_{TV} \leqslant H(P, Q) \sqrt{1 - \frac{1}{4} H^2(P, Q)}.$$

Insbesondere konvergiert eine Folge $(P_n)_{n \geqslant 1}$ im Totalvariations-Abstand genau dann, wenn Konvergenz im Hellinger-Abstand vorliegt.

Hinweis: Zeigen Sie zunächst, dass $\|P - Q\|_{TV} = \frac{1}{2} \int |p - q| d\mu = 1 - \int \min(p, q) d\mu$ sowie $(\int \sqrt{pq} d\mu)^2 \leqslant 2 \int \min(p, q) d\mu$ für μ-Dichten p, q gilt, und schließen Sie daraus die Behauptung.

(4 Punkte)

Abgabe bis 09:30 Uhr am Freitag, 18. Dezember (in den Übungszettelkasten INF 294)