Vorlesung *Statistik 1*
Wintersemester 2015/16
Ruprecht-Karls-Universität Heidelberg

Prof. Dr. Jan JOHANNES

8. Übungsblatt

Aufgabe 1. Es seien X eine P_θ-verteilte ZV mit unbekanntem Parameter $\theta \in \Theta$, Δ die Klasse der Schätzer eines interessierenden Parameters $\gamma \in \mathbb{R}$ mit endlicher Varianz, d.h. die Klasse der reellwertigen Statistiken $\widehat{\gamma}$ mit $\mathbb{E}_\theta(\widehat{\gamma}^2) < \infty$ für alle $\theta \in \Theta$ und $\widehat{\gamma}_o \in \Delta$ ein erwartungstreuer Schätzer für γ. Zeigen Sie, dass $\widehat{\gamma}_o$ genau dann ein Kleinste-Varianz-Schätzer für γ ist wenn $\mathbb{C}\mathrm{ov}_\theta(\widehat{\gamma}_o, U) = 0$ für alle $\theta \in \Theta$ und für alle $U \in \mathcal{U} := \{U \in \Delta \,|\, \mathbb{E}_\theta U = 0, \forall \theta \in \Theta\}$ gilt.

Hinweis: Überzeugen Sie sich davon, dass jeder erwartungstreue Schätzer $\widehat{\gamma} \in \Delta$ für γ die Form $\widehat{\gamma} = \widehat{\gamma}_o + U$ für ein $U \in \mathcal{U}$ besitzt. „$\Rightarrow$“ Betrachten Sie erwartungstreue Schätzer $\widehat{\gamma}_a$, $a \in \mathbb{R}$, für γ der Form $\widehat{\gamma} = \widehat{\gamma}_o + aU$ für ein $U \in \mathcal{U}$ und schließen Sie, dass $\mathbb{C}\mathrm{ov}_\theta(\widehat{\gamma}_o, U) = 0$ für alle $\theta \in \Theta$ gilt. „$\Leftarrow$“ Zeigen Sie, dass $\mathbb{V}\mathrm{ar}_\theta(\widehat{\gamma}_o) = \mathbb{C}\mathrm{ov}_\theta(\widehat{\gamma}_o, \widehat{\gamma})$ gilt und schließen Sie daraus die Behauptung. (4 Punkte)

Aufgabe 2. Es sei $\mathcal{P} = \{\mathfrak{E}\mathrm{xp}_\theta \,|\, \theta \in (0,\infty)\}$ die Familie der Exponentialverteilungen mit Dichten $f_\theta(x) = \theta \exp(-\theta x)\mathbb{1}_{(0,\infty)}(x)$. Zeigen Sie, dass $\widehat{\theta}_o = \frac{(n-1)}{\sum_{i=1}^n X_i}$ für $n \geqslant 3$ ein Kleinste-Varianz-Schätzer für θ ist, ist $\widehat{\theta}_o$ Cramér-Rao-effizient?

Hinweis: Sind $X \sim \Gamma(m,\theta)$ und $X \sim \Gamma(n,\theta)$ unabhängige ZV'en, so gilt $X + Y \sim \Gamma(m+n,\theta)$. Ferner $\mathfrak{E}\mathrm{xp}(\theta) = \Gamma(1,\theta)$. (4 Punkte)

Aufgabe 3. Beim Vergleich zweier Medikamente tritt das folgende Zweistichprobenproblem auf. Es bezeichne $X_1, \dots, X_n$ die Behandlungserfolge eines neuen Medikaments und $Y_1, \dots, Y_m$ seien die entsprechenden Ergebnisse eines herkömmlichen Medikaments in einer Kontrollgruppe.
Wir wollen annehmen, dass $X_1, \dots, X_n$ und $Y_1, \dots, Y_m$ unabhängige Zufallsgrößen mit $X_i \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$ und $Y_j \sim \mathcal{N}(\eta, \sigma^2)$ sind, wobei die Parameter $\mu, \eta \in \mathbb{R}$ und $\sigma > 0$ unbekannt sind. Geben Sie einen Kleinste-Varianz-Schätzer für den interessierenden Parameter $\gamma(\mu, \eta, \sigma) = \mu - \eta$ an, ist dieser Cramér-Rao-effizient? (4 Punkte)

Aufgabe 4. Es sei X ein zufälliger Vektor mit $X \odot \{\mathfrak{N}^{\otimes n}(\theta, \sigma_o^2) \,|\, \theta \in \mathbb{R}\}$ für festes $\sigma_o > 0$. Berechnen Sie den Pitman-Schätzer von θ,

$$\widehat{\theta}_o(x) = \frac{\int_{\mathbb{R}} u f_0(x_1 - u, \ldots, x_n - u) du}{\int_{\mathbb{R}} f_0(x_1 - u, \ldots, x_n - u) du}.$$

(4 Punkte)