Vorlesung *Statistik 1*
Wintersemester 2015/16
Ruprecht-Karls-Universität Heidelberg

Prof. Dr. Jan JOHANNES

7. Übungsblatt

Aufgabe 1. Sei $\mathcal{P} = \{P_\theta \,|\, \theta \in \Theta\}$ eine Familie von Verteilungen auf $(\mathcal{X}, \mathfrak{B})$. Existiert eine minimalerschöpfende Statistik für $\theta \in \Theta$, so ist jede vollständige und erschöpfende Statistik notwendigerweise minimalerschöpfend.

Hinweis: Sei $T : (\mathcal{X}, \mathfrak{B}) \to (\mathcal{T}, \mathfrak{C})$ minimalerschöpfend und $V : (\mathcal{X}, \mathfrak{B}) \to (\mathcal{Y}, \mathfrak{D})$ vollständig. Zeigen Sie, dass dann gelten muss: $T^{-1}(\mathfrak{C}) = V^{-1}(\mathfrak{D})$. Beachten Sie hierzu, dass X $\mathfrak{A}$-messbar ist, falls $\mathbf{E}_\theta(X|\mathfrak{A}) = X$ $\mathbf{P}_\theta$-f.s. gilt. (4 Punkte)

Aufgabe 2. Es sei X ein zufälliger Vektor mit $X \odot \{\mathfrak{N}^{\otimes n}(\mu, \sigma^2) \,|\, \mu \in \mathbb{R}, \sigma > 0\}$. Zeigen Sie, dass $\overline{X} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n X_i$ und $\sum_{i=1}^n (X_i - \overline{X})^2$ unabhängig sind.

Hinweis: Nehmen Sie zunächst σ^2 als fest gegeben an. Dann ist $\overline{X}$ eine erschöpfende und vollständige Statistik. (4 Punkte)

Aufgabe 3.

(i) Es sei X ein $\mathfrak{B}\mathrm{in}^{\otimes n}(1, \pi)$-verteilter zufälliger Vektor mit $n \geqslant 2$ und unbekanntem Parameter $\pi \in (0, 1)$. Bestimmen Sie den Kleinste-Varianz-Schätzer für den abgeleiteten Parameter $\gamma(\pi) = \pi \cdot (1 - \pi)$.

(ii) Es sei X eine $\mathfrak{B}\mathrm{in}(n, \pi)$-verteilte Zufallsgröße mit unbekanntem Parameter $\pi \in (0, 1)$. Zeigen Sie, dass für den abgeleiteten Parameter $\gamma(\pi) = 1/\pi$ kein erwartungstreuer Schätzer existiert. (4 Punkte)

Aufgabe 4. Es sei X eine Zufallsgröße mit $X \circleddash \{P_\theta \,|\, \theta \in (0,1)\}$, P_θ ist eine diskrete Wahrscheinlichkeitsverteilung auf $\{-1, 0, 1, \ldots\}$ mit einer Dichte

$$p_\theta(-1) = \theta, \quad p_\theta(k) = (1-\theta)^2\theta^k, \quad k = 0, 1, \ldots$$

bzgl. des Zählmaßes.

(i) Zeigen Sie, dass kein Kleinste-Varianz-Schätzer für θ existiert.

(ii) Bestimmen Sie einen Kleinste-Varianz-Schätzer für $\gamma(\theta) = (1-\theta)^2$.

Hinweis: (i) Zeigen Sie zunächst, dass jeder erwartungstreue Schätzer $\widehat{\theta}$ für θ die Form $\widehat{\theta}(x) = \mathbb{1}_{\{-1\}}(x) + ax$ für ein $a \in \mathbb{R}$ besitzt. Weisen Sie dann nach, dass $\mathbb{V}\mathrm{ar}_\theta(\widehat{\theta}) = \theta(1-\theta) - 2a\theta + 2a^2\theta/(1-\theta)$. Bestimmen Sie für θ den Wert a der die Varianz minimiert und schließen Sie daraus die Behauptung. (ii) Verfahren Sie wie in (i), um die Behauptung zu zeigen.

(4 Punkte)