Vorlesung *Statistik 1*
Wintersemester 2015/16
Ruprecht-Karls-Universität Heidelberg

*Prof. Dr. Jan JOHANNES*

# 6. Übungsblatt

**Aufgabe 1.** Beweisen oder widerlegen Sie die Aussage, dass folgende Verteilungen Exponentialfamilien bilden. Bestimmen Sie gegebenenfalls den natürlichen Parameterraum.

(a) Multinomialverteilung $\{\mathfrak{M}(\theta; n), \theta \in (0,1)^{s+1}, \sum_{i=0}^{s} \theta_i = 1\}$ mit Zähldichten

$$p_\theta(x) = \frac{n!}{x_0! \cdots x_s!} \theta_0^{x_0} \cdots \theta_s^{x_s}, \quad x \in \{0, \dots, n\}^{s+1}, \sum_{i=0}^{s} x_i = n;$$

(b) Poissonverteilung $\{\mathfrak{Poi}(\lambda), \lambda > 0\}$;

(c) Gleichverteilung $\{\mathfrak{U}([0,\theta]), \theta > 0\}$;

(d) Geometrische Verteilung $\{\mathfrak{Geom}(\theta), \theta \in (0,1)\}$ mit Zähldichten

$$p_\theta(x) = \theta(1-\theta)^x, \quad x = 0, 1, 2, \dots;$$

(e) Betaverteilung $\{\mathfrak{Beta}(a,b), a, b > 0\}$ mit Lebesguedichten

$$f_{a,b}(x) = \frac{\Gamma(a+b)}{\Gamma(a)\Gamma(b)} x^{a-1}(1-x)^{b-1}, \quad x \in (0,1).$$

(4 Punkte)

**Aufgabe 2.** Beweisen Sie: Sei $\mathcal{P}_{\Theta_{nat}}$ eine Exponentialfamilie mit natürlichem Parameterraum $\Theta_{nat} \subset \mathbb{R}^k$ und Darstellung

$$\frac{dP_\theta}{d\mu}(x) = C(\theta) h(x) \exp\big(\langle \theta, T(x) \rangle\big) = h(x) \exp\big(\langle \theta, T(x) \rangle - A(\theta)\big),$$

mit $A(\theta) = \log\big(\int_{\mathcal{X}} h(x) \exp(\langle \theta, T(x) \rangle) \mu(dx)\big)$. Ist $\theta_o$ ein innerer Punkt von $\Theta_{nat}$, so ist die erzeugende Funktion $\psi_{\theta_o}(s) = \mathbb{E}_{\theta_o}[\exp(\langle T, s \rangle)]$ in einer Umgebung der Null wohldefiniert und beliebig oft differenzierbar. Es gilt weiterhin $\psi_{\theta_o}(s) = \exp(A(\theta_o + s) - A(\theta_o))$ für alle $s$ mit $\theta_o + s \in \Theta_{nat}$. Für $i, j = 1, \dots, k$ folgt außerdem $\mathbb{E}_{\theta_o}(T_i) = \frac{\partial A}{\partial \theta_i}(\theta_o)$ und $\mathbb{C}\mathrm{ov}_{\theta_o}(T_i, T_j) = \frac{\partial^2 A}{\partial \theta_i \partial \theta_j}(\theta_o)$.

(4 Punkte)

**Aufgabe 3.** Für eine Familie $\mathcal{P}$ von Verteilungen wird eine erschöpfende (suffiziente) Statistik $T^*$ **minimalerschöpfend** (minimalsuffizient) genannt, falls für jede weitere erschöpfende Statistik $T$ eine Funktion $g$ existiert, so dass $T^* = g \circ T$ $P$-f.s. für alle $P \in \mathcal{P}$.

Sei $\mathcal{P}_\Theta$ eine Familie von Verteilungen auf $(\mathcal{X}, \mathscr{A})$ mit Dichten $f_\theta$ bezüglich eines $\sigma$-endlichen Maßes $\mu$. Ferner sei der Träger der Dichten identisch.

(i) Eine Statistik $T$ ist erschöpfend für $\mathcal{P}_\Theta$ genau dann, wenn für feste $\theta$ und $\theta'$ der Quotient $f_\theta / f_{\theta'}$ eine Funktion von $T(x)$ ist.

(ii) Ist $\Theta = \{0, ..., k\}$, so ist $T(X) = \left(\frac{p_1(X)}{p_0(X)}, ..., \frac{p_k(X)}{p_0(X)}\right)$ minimalerschöpfend für $\mathcal{P}_\Theta$.

(iii) Sei $\mathcal{P}_o \subset \mathcal{P}_\Theta$, $T$ minimalerschöpfend für $\mathcal{P}_o$ und erschöpfend für $\mathcal{P}_\Theta$. Beweisen Sie, dass dann $T$ minimalerschöpfend für $\mathcal{P}_\Theta$ ist.

(iv) Zeigen Sie, dass $\overline{X}$ minimalerschöpfend für $\{\mathfrak{N}^{\otimes n}(\mu, 1), \mu \in \mathbb{R}\}$ ist.

(4 Punkte)

**Aufgabe 4.** Sei $\mathcal{P}_\Theta$ eine Familie von Verteilungen auf $(\mathcal{X}, \mathscr{A})$, die von einem $\sigma$-endlichen Maß $\mu$ dominiert werde. Ferner sei $A$ ein festes Element von $\mathscr{A}$ mit $P_\theta(A) > 0$ für alle $\theta \in \Theta$, und $P_\theta^*$ die auf $A$ eingeschränkte Verteilung, d.h. $P_\theta^*(B) := \frac{P_\theta(B \cap A)}{P_\theta(A)}$. Zeigen Sie:

(a) Ist $T : (\mathcal{X}, \mathscr{A}) \to (\mathcal{Y}, \mathscr{B})$ erschöpfend für $\mathcal{P}_\Theta$, dann ist $T$ auch erschöpfend für $\mathcal{P}_\Theta^* := \{P_\theta^* : \theta \in \Theta\}$.

(b) Ist $T$ außerdem vollständig für $\mathcal{P}_\Theta$, dann ist $T$ auch vollständig für $\mathcal{P}_\Theta^*$.

(4 Punkte)