Vorlesung *Statistik 1*
Wintersemester 2015/16
Ruprecht-Karls-Universität Heidelberg

Prof. Dr. Jan JOHANNES

5. Übungsblatt

Aufgabe 1. Es seien $X_1, \dots, X_n$ unabhängig und identisch $\mathfrak{N}(\mu, 1)$-verteilte ZV'en mit unbekanntem Parameter $\mu \in \mathbb{R}$.

(a) Geben Sie das zugehörige statistische Experiment auf $\mathcal{X} = \mathbb{R}^n$ an und zeigen Sie, dass es vom Produktmaß $\mathfrak{N}(0, 1)^{\otimes n}$ dominiert wird.

(b) Bestimmen Sie die Likelihood-Funktion für dass dominierende Maß in (a). Welcher Wert $\mu \in \mathbb{R}$ maximiert die Likelihood-Funktion zu gegebenem $x \in \mathbb{R}^n$ (dies ist der Wert des Maximum-Likelihood-Schätzers bei Vorliegen der Beobachtung $X = x$).

(3 Punkte)

Aufgabe 2. Es seien $(\mathcal{X}, \mathscr{A}, \mathcal{P}_\Theta)$ ein statistisches Experiment, T eine $(\mathcal{S}, \mathscr{S})$-wertige Statistik auf $(\mathcal{X}, \mathscr{A}, \mathcal{P}_\Theta)$ und $\mathcal{P}_\Theta^T$ die induzierte Verteilungsfamilie auf $(\mathcal{S}, \mathscr{S})$. Zeigen Sie unter Verwendung von Lemma §3.2.3., dass $(\mathcal{X}, \mathscr{A}, \mathcal{P}_\Theta)$ informativer als $(\mathcal{S}, \mathscr{S}, \mathcal{P}_\Theta^T)$ ist.

(2 Punkte)

Aufgabe 3. Seien X_1, X_2 unabhängig und identisch $\mathfrak{P}\mathrm{oi}(\theta)$-verteilt mit unbekanntem Parameter $\theta \in (0, \infty) =: \Theta$, so dass $(X_1, X_2) \odot \mathcal{P}_\Theta = \{\mathfrak{P}\mathrm{oi}^{\otimes 2}(\theta), \theta \in \Theta\}$, und $\mathcal{P}_\Theta^T$ sei die durch $T := X_1 + X_2$ induzierte Verteilungsfamilie auf $(\mathbb{N}_0, \mathscr{P})$. Berechnen Sie die bedingte Verteilung von (X_1, X_2) gegeben T. Folgern Sie daraus, dass das statistische Experiment $(\mathbb{N}_0^2, \mathscr{P} \otimes \mathscr{P}, \mathcal{P}_\Theta)$ und das Bildexperiment $(\mathbb{N}_0, \mathscr{P}, \mathcal{P}_\Theta^T)$ äquivalent sind.

(4 Punkte)

Aufgabe 4. Seien $X : (\Omega_0, \mathscr{A}_0) \to (\Omega_1, \mathscr{A}_1)$ und $T : (\Omega_1, \mathscr{A}_1) \to (\Omega_2, \mathscr{A}_2)$ zwei Statistiken und $\mathcal{P}$ eine Familie von Wahrscheinlichkeitsmaßen auf $(\Omega_0, \mathscr{A}_0)$. Dann gilt

(i) Ist $T \circ X$ erschöpfend für $\mathcal{P}$, dann ist T erschöpfend für $\mathcal{P}^X$.

(ii) Falls $\mathscr{A}_0 = X^{-1}(\mathscr{A}_1)$, so gilt in (i) die Umkehrung.

(4 Punkte)

Aufgabe 5. Sei $P_\theta = \mathfrak{U}([\theta_1, \theta_2])$ für $\theta_1 < \theta_2$ die Gleichverteilung auf dem Intervall $[\theta_1, \theta_2]$.

(i) $(\min_{1 \leqslant i \leqslant n} X_i, \max_{1 \leqslant i \leqslant n} X_i)$ ist erschöpfend für $\{P_\theta^{\otimes n}, \theta \in \mathbb{R}^2, \theta_1 < \theta_2\}$.

(ii) Ist θ_1 bekannt, so ist $\max_{1 \leqslant i \leqslant n} X_i$ erschöpfend für $\{P_{(\theta_1, \theta)}^{\otimes n}, \theta \in (\theta_1, \infty)\}$.

(iii) Ist θ_2 bekannt, so ist $\min_{1 \leqslant i \leqslant n} X_i$ erschöpfend für $\{P_{(\theta, \theta_2)}^{\otimes n}, \theta \in (-\infty, \theta_2)\}$.

(3 Punkte)