Vorlesung *Statistik 1*
Wintersemester 2015/16
Ruprecht-Karls-Universität Heidelberg

Prof. Dr. Jan JOHANNES

4. Übungsblatt

Aufgabe 1. Eine Krankheit kommt bei ca. 0.1% der Bevölkerung vor. Ein Test zur Erkennung der Krankheit führt bei 97% der Kranken, aber auch bei 2% der Gesunden zu einer Reaktion. Auf Grund des Tests wird eine Person als *krank* bzw. *gesund* klassifiziert. Mit $v_0 \geqslant 0$ (bzw. $v_1 \geqslant 0$) werde der Verlust bei der Klassifizierung *krank* (bzw. *gesund*) eines gesunden (bzw. kranken) Patienten bewertet. Formulieren Sie dies als Bayessches Entscheidungsproblem und geben Sie eine Bayes-optimale Entscheidungsregel in Abhängigkeit von v_0 und v_1 an.
(4 Punkte)

Aufgabe 2. Die Beta-Verteilung $\mathfrak{Beta}(a, b)$ auf $[0, 1]$ ist gegeben durch die Dichte

$$f_{a,b}(x) = \frac{\Gamma(a+b)}{\Gamma(a)\Gamma(b)} x^{a-1}(1-x)^{b-1}, \quad x \in (0,1),$$

wobei $a, b > 0$ und Γ die Gamma-Funktion bezeichnet. $\mathfrak{Beta}(a, b)$ hat Erwartungswert $\mu_{a,b} = \frac{a}{a+b}$ und Varianz $\sigma^2_{a,b} = \frac{ab}{(a+b)^2(a+b+1)}$.

(a) Skizzieren Sie $f_{a,b}$ für $(a, b) \in \{0.5; 1; 10\}^2$ (Computereinsatz gestattet).

(b) Es sei $X \odot \{\mathfrak{Bin}(n, \pi), \pi \in (0, 1)\}$ mit $n \geqslant 1$. Betrachte $\mathfrak{Beta}(a, b)$ als a-priori Verteilung für den Parameter π. Zeigen Sie, dass die a-posteriori Dichte bei Vorliegen einer Beobachtung $X = x$ zur Beta-Verteilung $\mathfrak{Beta}(a + x, b + n - x)$ gehört.

(c) Schließen Sie, dass der Bayesschätzer bzgl. einer quadratischen Verlustfunktion gegeben ist durch $\widehat{\pi}_{a,b} = \frac{a+X}{a+b+n}$. Bestimmen Sie sein quadratisches Risiko als Funktion von π und sein zugehöriges Bayesrisiko.
(4 Punkte)

Aufgabe 3. Sei $(\mathcal{X}, \mathscr{A}, \mathcal{P}_\Theta)$ mit $\Theta \subset \mathbb{R}^d$ ein statistisches Experiment mit a-priori Verteilung $\boldsymbol{\vartheta} \sim P_{\boldsymbol{\vartheta}}$ und δ sei eine Bayesregel (bzgl. $P_{\boldsymbol{\vartheta}}$) zur quadratischen Verlustfunktion $\nu(\theta, e) = \|e - \theta\|^2$. Zeigen Sie, dass δ nur dann erwartungstreu sei kann, wenn $\mathfrak{R}^{\boldsymbol{\vartheta}}_\nu(\delta) = 0$.
(4 Punkte)

Aufgabe 4. Beweisen Sie das Stein- bzw. Chen-Stein-Lemma:

(a) Eine reellwertige Zufallsvariable X ist $\mathfrak{N}(\mu, \sigma^2)$-verteilt genau dann, wenn $\mathbb{E}[(X-\mu)f(X)] = \sigma^2\mathbb{E}[f'(X)]$ für alle $f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R})$ mit $\mathbb{E}[|f'(X)|] < \infty$ gilt.

(ii) Eine ZV N mit Werten in $\mathbb{N}_0$ ist $\mathfrak{P}\mathrm{oi}(\lambda)$-verteilt genau dann, wenn $\mathbb{E}[Nf(N)] = \lambda\mathbb{E}[f(N+1)]$ für jedes beschränkte $f : \mathbb{N}_0 \to \mathbb{R}$ gilt. (4 Punkte)