3. Übungsblatt

Aufgabe 1. Es seien $(\mathcal{X}, \mathscr{A}, \mathcal{P}_\Theta)$ ein statistisches Experiment mit $\Theta = \Theta_0 \dot\cup \Theta_1$, und $(\mathcal{E}, \mathscr{E}, \nu)$ ein statistisches Entscheidungsproblem mit Entscheidungsraum $\mathcal{E} = [0,1]$ und Verlustfunktion $\nu(\theta, e) = \nu_0 e \mathbb{1}_{\Theta_0}(\theta) + \nu_1(1-e)\mathbb{1}_{\Theta_1}(\theta)$ für $\nu_0, \nu_1 \in \mathbb{R}_+$. Zeigen Sie, dass eine Entscheidungsregel $\varphi : \mathcal{X} \to \mathcal{E}$ (ein randomisierter Test) für das Testproblem $H_0 : \theta \in \Theta_0$ gegen $H_1 : \theta \in \Theta_1$ genau dann unverzerrt ist, wenn sie zum Niveau $\alpha = \nu_1/(\nu_0 + \nu_1)$ unverfälscht ist, d.h.

$$\forall \theta \in \Theta_0 : \mathbb{E}_\theta(\varphi) \leqslant \alpha, \quad \forall \theta \in \Theta_1 : \mathbb{E}_\theta(\varphi) \geqslant \alpha.$$

(4 Punkte)

Aufgabe 2. Es seien $(\mathcal{X}, \mathscr{A}, P_\Theta)$ ein statistisches Experiment, $X \sim P_\Theta$ eine Beobachtung, $\boldsymbol{\vartheta}$ ein ZV mit a-priori Verteilung $P_{\boldsymbol{\vartheta}}$ auf $(\Theta, \mathscr{B}_\Theta)$, so dass $P_\theta \ll \mu$ für alle $\theta \in \Theta$ sowie $P_{\boldsymbol{\vartheta}} \ll \nu$ für σ-endliche Maße μ und ν gilt. Weiterhin sei $f_{\boldsymbol{\vartheta}}$ eine ν-Dichte von $P_{\boldsymbol{\vartheta}}$ und für jedes $\theta \in \Theta$ sei f_θ eine μ-Dichte von P_θ. Zeigen Sie für $(\mathscr{A} \otimes \mathscr{B}_\Theta)$-messbare Funktionen $\mathcal{X} \times \Theta \ni (x, \theta) \mapsto f_\theta(x) \in \mathbb{R}_+$:

(a) Für $f_X(x) := \int_\Theta f_\theta(x) f_{\boldsymbol{\vartheta}}(\theta) \nu(d\theta)$ in $(0, \infty)$ definiere

$$f_{\boldsymbol{\vartheta}\,|X=x}(\theta) := \frac{f_\theta(x) f_{\boldsymbol{\vartheta}}(\theta)}{f_X(x)}, \quad \theta \in \Theta, \qquad \text{(Bayesformel)}$$

und sonst setze $f_{\boldsymbol{\vartheta}\,|X=x}(\theta) := f_{\boldsymbol{\vartheta}}(\theta)$, $\theta \in \Theta$. Dann ist $f_{\boldsymbol{\vartheta}\,|X=x}$ eine ν-Wahrscheinlichkeitsdichte für alle $x \in \mathcal{X}$.

(b) Sei $P_{X,\boldsymbol{\vartheta}}$ die gemeinsame Verteilung von X und $\boldsymbol{\vartheta}$ gegeben durch $P_{X,\boldsymbol{\vartheta}}(dx, d\theta) = P_\theta(dx) P_{\boldsymbol{\vartheta}}(d\theta)$. Ist die $(\mathscr{A}, \mathscr{B}_\Theta)$-messbare Funktion $g : \mathcal{X} \times \Theta \to \mathbb{R}$ nichtnegativ oder ist $\mathbb{E}_{X,\boldsymbol{\vartheta}}[|g(X, \boldsymbol{\vartheta})|] < \infty$, dann gilt

$$\mathbb{E}_{\boldsymbol{\vartheta}\,|X}[g(X, \boldsymbol{\vartheta})] = \int_\Theta g(x, \theta) f_{\boldsymbol{\vartheta}\,|X}(\theta) \nu(d\theta) \quad P_X\text{-f.s.}$$

und insbesondere, $\int_B f_{\boldsymbol{\vartheta}\,|X}(\theta)\nu(d\theta) = \mathbb{E}_{\boldsymbol{\vartheta}\,|X}[\mathbb{1}_B(\boldsymbol{\vartheta})] =: P_{\boldsymbol{\vartheta}\,|X}(B)$ für $B \in \mathscr{B}_\Theta$.

(c) Bestimmen Sie $f_{\boldsymbol{\vartheta}\,|X}$ sowie $\mathbb{E}_{\boldsymbol{\vartheta}\,|X}[(X - \boldsymbol{\vartheta})^2]$ im Fall $\Theta = \mathbb{R}$, $P_\theta = \mathfrak{N}(\theta, 1)$, $P_{\boldsymbol{\vartheta}} = \mathfrak{N}(0, \rho^2)$ für festes $\rho > 0$. Was ergibt sich für $\rho \to \infty$ und $\rho \to 0$.

(4 Punkte)

Aufgabe 3. Wenn man in der Bayesformel die Dichte f_{ϑ} durch eine nichtnegative, messbare Funktion f_{ϑ} ersetzt und $f_{\vartheta\,|X=x}(\theta)$ weiterhin wohldefiniert ist, so ergibt sich aus der a-posteriori Verteilung ein verallgemeinerter Bayesschätzer.
Gegeben sei $X \circleddash \{\mathfrak{N}^{\otimes n}(\mu, \mathrm{Id}_d), \mu \in \mathbb{R}^d\}$.

(i) Betrachten Sie das Lebesguemaß als verallgemeinerte a-priori Verteilung. Zeigen Sie, dass $\overline{X}$ ein verallgemeinerter Bayesschätzer von μ bzgl. der quadratischen Verlustfunktion $\nu(\mu, e) = \|\mu - e\|^2$ ist.

(ii) Betrachten Sie für $d = 1$ die Funktion $f_{\vartheta}(\theta) = \mathbb{1}_{(a,b)}(\theta)$ mit $a, b \in \mathbb{R} \cup \{-\infty, \infty\}$. Berechnen Sie den verallgemeinerter Bayesschätzer $\widehat{\mu}_{a,b}$ von μ bzgl. der quadratischen Verlustfunktion $\nu(\mu, e) = (\mu - e)^2$. Zeichnen Sie $\widehat{\mu}_{0,1}$ als Funktion von $\overline{X}$.

(4 Punkte)

Aufgabe 4. In einem gewöhnlichen linearen Modell $Y \circleddash \{\mathfrak{L}(X\beta, \sigma^2 \mathrm{Id}_p), \beta \in \mathbb{R}^p, \sigma > 0\}$ wird der Schätzer $\widehat{\beta}_\alpha = (X^t X + \alpha^2 \mathrm{Id}_p)^{-1} X^t Y$ *Ridge-Regression*-Schätzer genannt. Zeigen Sie, dass $\widehat{\beta}_\alpha$ ein Bayes-optimaler Schätzer bzgl. der quadratischen Verlustfunktion und der a-priori Verteilung $\beta \sim \mathfrak{N}(0, \rho^2 \mathrm{Id}_p)$ mit geeigneter a-priori Varianz $\rho^2 = \rho^2(\alpha, \sigma) \geqslant 0$ ist.

(4 Punkte)