Vorlesung *Statistik 1*
Wintersemester 2015/16
Ruprecht-Karls-Universität Heidelberg

Prof. Dr. Jan JOHANNES

12. Übungsblatt

Aufgabe 1. Betrachten Sie für ein (binäres) statistisches Modell $(\mathcal{X}, \mathscr{A}, \mathcal{P}_{\{\theta_0,\theta_1\}})$ das Testproblem $H_0 : \theta = \theta_0$ gegen $H_1 : \theta = \theta_1$. Beweisen Sie:

(a) Ist φ ein gleichmäßig bester Test zum Niveau $\alpha \in (0, 1)$ mit $\mathbb{E}_{\theta_0}(\varphi) < \alpha$, dann gilt $\mathbb{E}_{\theta_1}(\varphi) = 1$.

(b) Im Neyman-Pearson Lemma §5.1.6 gilt die notwendige Bedingung: Jeder gleichmäßig beste Test φ_o zum Niveau $\mathbb{E}_{\theta_0}(\varphi_o)$ besitzt $P_{\theta_0} + P_{\theta_1}$-f.s. die Form eines Neyman-Pearson-Test.

(4 Punkte)

Aufgabe 2. Es sei $X \sim \{\mathfrak{Exp}^{\otimes n}(\theta), \theta > 0\}$. Konstruieren Sie einen gleichmäßigen besten Test zum Niveau $\alpha \in (0, 1)$ für das Testproblem $H_0 : \theta \leqslant 1$ gegen $H_1 : \theta > 1$. Geben sie für $n = 1$ den kritischen Wert explizit an und zeichnen Sie die Gütefunktion für $\alpha = 0,05$.

(4 Punkte)

Aufgabe 3.

(a) Zeigen Sie, dass $\{\mathfrak{U}^{\otimes n}([0, \theta]), \theta > 0\}$ einen monotonen Dichtequotienten in $T(x) = x_{(n)} := \max\{x_1, ..., x_n\}$ besitzt.

(b) Bestimmen Sie für $X \sim \{\mathfrak{U}^{\otimes n}([0, \theta]), \theta > 0\}$ einen gleichmäßig besten Test zum Niveau $\alpha \in (0, 1)$ für das Testproblem $H_0 : \theta \leqslant \theta_o$ gegen $H_1 : \theta > \theta_o$ mit festem θ_o.

(c) Untersuchen Sie den Test $\phi_\alpha(x) = \max\{\alpha, \mathbb{1}_{(\theta_o,\infty)}(x_{(n)})\}$ auf Optimalität, d.h. entscheiden Sie, ob es sich um einen gleichmäßig besten Test handelt.

(4 Punkte)

Aufgabe 4. Beweisen Sie die Verallgemeinerung des Neyman-Pearson-Lemmas §5.1.15 aus der Vorlesung.
Hinweis: Orientieren Sie sich am Beweis des Neyman-Pearson-Lemmas.

(4 Punkte)

Abgabe bis 09:00 Uhr am Freitag, 22. Januar 2016 (in den Übungszettelkasten INF 294)