Vorlesung *Statistik 1*
Wintersemester 2015/16
Ruprecht-Karls-Universität Heidelberg

Prof. Dr. Jan JOHANNES

11. Übungsblatt
(= Probeklausur = Klausur, WS 2013)

(I)	Die Aufgaben 1 – 4 sind abzugeben (insgesamt 16 Punkte).
(II)	Die Aufgaben 5 – 8 sind nicht abzugeben und können auf Wunsch in der Übungsgruppe besprochen werden (insgesamt 14 Punkte).

Aufgabe 1. Es sei $X = (X_1, \dots, X_n) \circledsim \mathcal{P}_\Theta$. Die Familie $\mathcal{P}_\Theta$ werde dominiert von einem σ-endlichen Maß μ.

(a) Es sei T eine suffiziente Statistik für $\theta \in \Theta$. Zeigen Sie, dass der Maximum-Likelihood-Schätzer $\hat{\theta}$ über T faktorisiert, d.h. dass eine Funktion g existiert mit $\hat{\theta} = g \circ T$.

(b) Es sei $\mathcal{P}_\Theta = \{\mathfrak{Exp}^{\otimes n}(\theta^2), \theta \in \Theta = (0, \infty)\}$. Berechnen Sie den Maximum-Likelihood-Schätzer von θ.

(2+2 Punkte)

Aufgabe 2. Sei $X = (X_1, \dots, X_n) \circledsim \{\Gamma^{\otimes n}(k, b), k, b > 0\}$ mit Randdichten

$$f_{k,b}(x) = \frac{1}{\Gamma(k) b^k} \cdot x^{k-1} \cdot e^{-\frac{x}{b}} \cdot \mathbb{I}_{(0,\infty)}(x) \quad (k, b > 0)$$

bezüglich des Lebesguemaßes auf $\mathbb{R}$. Es gilt $\mathbb{E}X_1 = k \cdot b$. Es seien

$$M := \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} X_i, \quad U := \sqrt[n]{\prod_{i=1}^{n} X_i},$$

das arithmetische und geometrische Mittel. Zeigen Sie:

(a) U/M ist unwesentlich (ancillary) bzgl. des Parameters b.
Hinweis: Was ist die Verteilung von $Y_i := \frac{1}{b} \cdot X_i$?

(b) M und U/M sind unabhängig.

(c) Berechnen Sie $\mathbb{E}\left[U/M\right]$ mit Hilfe von (b).
Kontrollergebnis: $\mathbb{E}\left[\frac{U}{M}\right] = \frac{1}{k} \left(\frac{\Gamma(k+\frac{1}{n})}{\Gamma(k)}\right)^n$.

(2+2+2 Punkte)

Aufgabe 3. Es sei $X \circledsim \{\mathfrak{U}([\theta, \theta+1], \theta \in \mathbb{R})\}$ (Gleichverteilung). Zeigen Sie, dass $T(X) = X$ nicht vollständig für $\theta \in \mathbb{R}$ ist.

Hinweis: Die Betrachtung periodischer Funktionen könnte hilfreich sein. (2 Punkte)

Aufgabe 4. Eine Forschungsgruppe untersucht die Halbwertszeit von ^{60}Co. Die bisher vermutete Halbwertszeit beträgt $\lambda_0 = 5.2714$ Jahre. Die Forscher beobachten nun in $n = 5$ unabhängigen Experimenten Zerfallszeiten

X_1	X_2	X_3	X_4	X_5
6.0	4.0	6.0	7.0	5.0

In ihrem Modell nehmen sie an, dass $(X_1, \ldots, X_n) \circledsim \{\mathfrak{Exp}^{\otimes n}\left(\frac{1}{\lambda}\right), \lambda > 0\}$. Die Forscher wollen basierend auf ihren Messungen nachweisen, dass die wahre Halbwertszeit größer als die bisher vermutete ist. Formulieren Sie einen geeigneten Test zum Niveau $\alpha = 0.05$ und entscheiden Sie, ob ein Nachweis einer größeren Halbwertszeit mit den Ergebnissen der Forscher möglich ist.

Hinweis: Es gilt $\sum_{i=1}^{n} X_i \sim \Gamma(n, \frac{1}{\lambda})$ und das 0.95-Quantil der $\Gamma(5, \frac{1}{\lambda_0})$-Verteilung ist $\Gamma_{0.95} = 48.25$. (4 Punkte)

Aufgabe 5. Sei $X \circledsim \{\mathfrak{Bin}^{\otimes n}(1, p), p \in (0, 1)\}$. Bestimmen Sie den Kleinste-Varianz–Schätzer für den interessierende Parameter $\gamma(p) = p^2$ als Funktion von $X = (X_1, \ldots, X_n)$. (3 Punkte)

Aufgabe 6. Sei $X \circledsim \mathcal{P}_{\Theta}^{\otimes n}$, wobei $\mathcal{P}_{\Theta}$ für ein festes $\lambda > 0$ die Familie der geshifteten Exponentialverteilungen mit Dichten

$$p_\theta(x) = \lambda \exp\big(-\lambda(x - \theta)\big) \cdot \mathbb{I}_{[\theta,\infty)}(x)$$

sei. Berechnen Sie den Pitman-Schätzer für θ als Funktion von $X = (X_1, \ldots, X_n)$. (3 Punkte)

Aufgabe 7. Seien $(X_1, \ldots, X_n) \circledsim \{\mathfrak{Bin}^{\otimes n}(1, p), p \in (0, 1)\}$. Wir geben für p a priori eine Gleichverteilung auf $[0, 1]$ vor. Berechnen Sie den Bayesschätzer von p unter quadratischem Risiko.

Hinweis: Verwenden Sie (ohne Beweis) die Formel

$$\int_0^1 p^m (1-p)^{n-m} \,\mathrm{d}p = \frac{m!(n-m)!}{(n+1)!} \qquad (n, m \in \mathbb{N})$$

Denken Sie in Ihrer Rechung an den Normierungsfaktor der posteriori-Verteilung! (2+2 Punkte)

Aufgabe 8. Wir wollen die Behauptung überprüfen, dass Fußballfans im Vergleich zu anderen Menschen häufiger an Übergewicht leiden. Dafür wurde eine Umfrage durchgeführt. Von 8 befragten Fußballfans waren 6 übergewichtig. Außerdem wurden 14 Personen befragt, die kein Interesse an Fußball haben. Von diesen waren ebenfalls 6 übergewichtig.

Kann die Behauptung auf Basis dieser Umfrage zum Niveau $\alpha = 0.01$ statistisch gesichert werden?

Zur Beantwortung können Sie die folgenden (gerundeten) Wahrscheinlichkeiten von hypergeometrischen Verteilungen verwenden:

x	8	7	6	5
H(22,12,8)(x)	0.0003	0.0071	0.0538	0.1845
H(22,12,6)(x)	0.0000	0.0000	0.0124	0.1061
H(22,8,12)(x)	0.0015	0.0248	0.1301	0.2972

(4 Punkte)