Vorlesung *Statistik 1*
Wintersemester 2015/16
Ruprecht-Karls-Universität Heidelberg

Prof. Dr. Jan JOHANNES

10. Übungsblatt

Zwei der sechs Aufgaben sind freiwillig (insgesamt 8 *Bonuspunkte*).

Aufgabe 1. Für zwei Wahrscheinlichkeitsmaße P und Q auf $(\mathcal{X}, \mathscr{A})$ wird die Funktion

$$KL(P|Q) = \begin{cases} \int_{\mathcal{X}} \log\left(\frac{dP}{dQ}(x)\right) P(dx), & \text{falls } P \ll Q, \\ +\infty, & \text{sonst} \end{cases}$$

Kullback-Leibler-Divergenz genannt.

(a) Zeigen Sie, dass $f : (0, \infty) \to \mathbb{R}$ mit $x \mapsto x(\log x)$ konvex ist und somit (verwende $dP = \frac{dP}{dQ} dQ$)

$$KL(P|Q) \geqslant 0 \quad \text{und} \quad KL(P|Q) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad P = Q.$$

Bestimmen Sie zwei äquivalente Wahrscheinlichkeitsmaße P und Q mit

$$KL(P|Q) \neq KL(Q|P).$$

(b) Weisen Sie für Produktmaße nach, dass die Kullback-Leibler-Divergenz additiv ist:

$$KL(\otimes_{i=1}^n P_i | \otimes_{i=1}^n Q_i) = \sum_{i=1}^n KL(P_i|Q_i).$$

(c) Es sei $\mathcal{P}_\Theta$ eine natürliche Exponentialfamilie und θ_o ein innerer Punkt von $\Theta \subset \mathbb{R}^k$. Zeigen Sie, dass $KL(P_{\theta_o}|P_\theta) = A(\theta) - A(\theta_o) + \langle \dot{A}(\theta_o), \theta_o - \theta \rangle$ gilt. (4 Punkte)

Aufgabe 2.

(i) Ein Teich enthält eine unbekannte Anzahl θ von Karpfen. Zur Schätzung von θ werden zunächst k Fische gefangen, markiert und wieder freigelassen. Wenn sich die markierten Fische wieder gut verteilt haben, werden n Fische gefangen, von denen x markiert sind. Modellieren Sie die Schätzung des Fischbestandes θ durch ein statistisches Experiment mit hypergeometrischen Verteilungen und bestimmen Sie einen Maximum-Likelihood-Schätzer, diskutieren Sie dabei den Fall $x = 0$ separat.

(ii) Es sei $\mathcal{P}_\Theta = \{P_\theta \,|\, \theta \in \Theta = \mathbb{R}\}$ die Familie geshifteter Laplace-Verteilungen mit Dichten $f_\theta(x) = \frac{1}{2}\exp\big(-|x-\theta|\big)$, $x \in \mathbb{R}$. Zeigen Sie, dass der Median einer Stichprobe $X \circledcirc \mathcal{P}_\Theta^{\otimes n}$ ein Maximum-Likelihood-Schätzer für θ ist. (4 Punkte)

Aufgabe 3. Es sei $X \circledcirc \{\mathfrak{P}\mathrm{oi}^{\otimes n}(\lambda), \lambda > 0\}$. Bestimmen Sie den Maximum-Likelihood-Schätzer und verfizieren Sie direkt Konsistenz und asymptotische Normalität. (4 Punkte)

Aufgabe 4. Es sei $X \circledcirc \{\mathfrak{U}^{\otimes n}([0,\theta]), \theta > 0\}$. Weisen Sie nach, dass $\widehat{\theta}_n := \max_{1\leqslant i\leqslant n} X_i$ ein Maximum-Likelihood-Schätzer für θ ist und $n(\theta - \widehat{\theta}_n) \xrightarrow{\mathcal{L}} \mathfrak{E}\mathrm{xp}(1/\theta_o)$ unter $\mathfrak{U}^{\otimes n}([0,\theta])$ für $n \to \infty$ gilt. (4 Punkte)

Aufgabe 5. Es seien $\varphi : [0,1] \to [0,1]$ eine stetige, fallende Funktion mit $\varphi(0) = 1$ und $0 < \varphi(x) \leqslant 1 - x$ für $x \in (0,1)$ und $\mathcal{P}_{[0,1]} = \{P_\theta \,|\, \theta \in [0,1]\}$ eine Verteilungsfamilie mit Lebesguedichten

$$f_\theta(x) = \frac{1-\theta}{\varphi(\theta)}\Big(1 - \frac{|x-\theta|}{\varphi(\theta)}\Big)_+ \mathbb{1}_{[0,1)}(\theta) + \frac{\theta}{2}\mathbb{1}_{[-1,1]}(x).$$

Ziel ist es für $X \circledcirc \mathcal{P}_{[0,1]}^{\otimes n}$ und geeignetes φ zu sehen, dass für alle $\theta \in [0,1]$ jeder MLS fast sicher gegen Eins konvergiert und somit insbesondere inkonsistent ist. Zeigen Sie:

(a) Es existiert ein Maximum-Likelihood-Schätzer $\widehat{\theta}_n$.

(b) Für $\theta < 1$ is $f_\theta(x) < 1/\varphi(\theta) + 1/2$. Folgern Sie, dass für Die Loglikelihood-Funktion ℓ_n bei n Beobachtungen und für jedes $\alpha < 1$

$$\max_{0\leqslant\theta\leqslant\alpha} \frac{\ell_n(\theta)}{n} \leqslant \log\Big(\frac{1}{\varphi(\alpha)} + \frac{1}{2}\Big) < \infty$$

gilt. Um zu beweisen, dass $\lim_{n\to\infty} \widehat{\theta}_n = 1$ f.s. für alle $\theta \in [0,1]$ gilt, reicht es, $\max_{0\leqslant\theta\leqslant1} \ell_n(\theta)/n \to \infty$ f.s. zu zeigen.

(c) Mit $X_{(n)} = \max_{1\leqslant i\leqslant n} X_i$ gilt f.s.

$$\max_{0\leqslant\theta\leqslant1} \frac{\ell(\theta)}{n} \geqslant \frac{n-1}{n}\log\Big(\frac{X_{(n)}}{2}\Big) + \frac{1}{n}\log\Big(\frac{1-X_{(n)}}{\varphi(X_{(n)})}\Big).$$

(d) Aus dem Lemma von Borell-Cantelli folgt $n^{1/4}(1 - X_{(n)}) \to 0$ f.s. für $\theta = 0$ und auch für alle $\theta \in [0,1]$. Mit $\varphi(\theta) := (1-\theta)\exp(-(1-\theta)^{-4} + 1)$ folgt nun $\liminf_{n\to\infty}(1/n)\log((1 - X_{(n)})/\varphi(X_{(n)})) = \infty$ f.s. und damit die gewünschte Aussage. (4 Punkte)

Aufgabe 6. Es sei $\Theta \subset \mathbb{R}^k$ kompakt sowie $(X_n(\theta), \theta \in \Theta)_{n\geqslant1}$ und $(X(\theta), \theta \in \Theta)$ stetige Prozesse mit $X_n(\theta) \xrightarrow{P} X(\theta)$ für $n \to \infty$ für alle $\theta \in \Theta$. Zeigen Sie:

(a) $\forall \delta > 0 \,\exists\, U_\delta \subset \Theta$ endlich: $\sup_{\theta\in\Theta} \inf_{\widetilde{\theta}\in U_\delta} |\theta - \widetilde{\theta}| \leqslant \delta$.

(b) Mit dem Stetigkeitsmodul $\omega_\delta(f) := \sup_{|\theta_1-\theta_2|\leqslant\delta} |f(\theta_1) - f(\theta_2)|$ gilt

$$\sup_{\theta\in\Theta} |X_n(\theta) - X(\theta)| \leqslant \omega_\delta(X_n) + \omega_\delta(X) + \max_{\theta\in U_\delta} |X_n(\delta) - X(\delta)|.$$

(c) Es gilt $\max_{\theta\in U_\delta} |X_n(\theta) - X(\theta)| \xrightarrow{P} 0$ für $n \to \infty$ sowie $\omega_\delta(X) \to 0$ fast sicher für $\delta \to 0$.

Schließen Sie daraus, dass aus der Straffheitsbedingung

$$\forall\varepsilon, \eta > 0\, \exists\, \delta > 0 \ :\ \limsup_{n\to\infty} P(\omega_\delta(X_n) \geqslant \varepsilon) \leqslant \eta$$

die gleichmäßige Konvergenz $\sup_{\theta\in\Theta} |X_n(\theta) - X(\theta)| \xrightarrow{P} 0$ für $n \to \infty$ folgt. (4 Punkte)

FROHE WEIHNACHTEN UND EINEN GUTEN RUTSCH INS NEUE JAHR.

Abgabe bis 09:30 Uhr am Freitag, 08. Januar 2016 (in den Übungszettelkasten INF 294)