Vorlesung *Statistik 1*
Wintersemester 2015/16
Ruprecht-Karls-Universität Heidelberg

Prof. Dr. Jan JOHANNES

1. Übungsblatt

Aufgabe 1. Zeigen Sie, dass eine Matrix $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ genau dann positiv semi-definit ist, wenn ein n-dimensionaler zufälliger Vektor X mit Kovarianzmatrix A existiert.

(3 Punkte)

Aufgabe 2. (Beweis von Korollar §1.4.6) Sei $X \sim \mathfrak{N}(\mu, \Sigma)$ mit $\mu \in \mathbb{R}^n$ und $\Sigma \in \mathbb{R}^{n\times n}$. Zeigen oder widerlegen Sie die folgenden Aussagen

(a) Die i-te Koordinate von X ist $\mathfrak{N}(\mu_i, \Sigma_{ii})$-verteilt. Sei umgekehrt $X_i \sim \mathfrak{N}(\mu_i, \Sigma_{ii})$ für alle $1 \leqslant i \leqslant n$, wobei $\mu_i \in \mathbb{R}$ und $\Sigma_{ii} > 0$. Dann besitzt $(X_1, \dots, X_n)^t$ eine multivariate Normalverteilung.

(b) Die Koordinaten von X sind genau dann unabhängig, wenn sie unkorreliert sind.

(c) Für $A \in \mathbb{R}^{p\times q}$ und $b \in \mathbb{R}^q$ gilt $Y = AX + b \sim \mathfrak{N}(A\mu + b, A\Sigma A^t)$.

(d) Ist Σ strikt positiv-definit, dann besitzt X die Lebesgue-Dichte:

$$f(x) = \frac{1}{(2\pi)^{p/2}(\det\Sigma)^{1/2}} \exp\{-\frac{1}{2}\langle\Sigma^{-1}(x-\mu), (x-\mu)\rangle\}, \qquad x \in \mathbb{R}^p.$$

(5 Punkte)

Aufgabe 3. (Beweis von Korollar §1.4.9) Es seien $Z \sim \mathfrak{N}^{\otimes q}(0,1)$ und $\delta \in \mathbb{R}$ dann ist $(Z_1+\delta)^2 + \sum_{i=2}^q Z_i^2 \sim \chi_q^2(\delta^2)$ nichtzentral χ^2-verteilt mit q Freiheitsgraden und Nichtzentralitätsparameter δ^2. Zeigen Sie die folgenden Aussagen

(i) Ist $Z \sim \mathfrak{N}(\mu, \mathrm{Id}_q)$ mit $\mu \in \mathbb{R}^q$, so gilt $\|Z\|^2 \sim \chi_q^2(\|\mu\|^2)$.

(ii) Ist $W \sim \chi_q^2(\delta^2)$, so gilt $\mathbb{E}(W) = \delta^2 + q$. (4 Punkte)

Aufgabe 4. Bei acht Absolventen werden anhand einer Befragung die Anzahl der Mitstudenten und das Einstiegsgehalt ermittelt:

Anzahl Mitstudenten x_i	125	100	160	100	185	145	220	185
Einstiegsgehalt Y_i	80	100	75	80	110	110	135	130

(a) Modellieren Sie die Beobachtungen mit Hilfe eines linearen Modells und bestimmen Sie die Regressionsgerade. Zeichnen Sie Daten und Regressionsgerade in ein geeignetes Koordinatensystem ein.

(b) Es stellt sich heraus, dass die ersten Vier ein anderes Fach studiert haben als die anderen Vier. Bestimmen und zeichnen Sie die Regressionsgeraden für beide Studienfächer getrennt.

(c) Wie erklären Sie die unterschiedlichen Ergebnisse in (a) und (b)?

Hinweis: Auf der Webseite zur Vorlesung können Sie sich mit Hilfe einer Flash-Animation den Einfluß der einzelnen Datenpunkte darstellen lassen (Option Leverage auswählen).

(4 Punkte)