Statistik 1
Prof. Dr. Jan Johannes
Sergio Brenner Miguel
Sommersemester 2019

UNIVERSITÄT HEIDELBERG
ZUKUNFT SEIT 1386

13. Übungsblatt

Aufgabe 1	Aufgabe 2	Aufgabe 3	Aufgabe 4	Σ

Aufgabe 1 (5 Bonuspunkte)

Es seien $\varphi : [0,1] \to [0,1]$ eine stetige, monoton fallende Funktion mit $\varphi(0) = 1$ und $0 < \varphi(x) \leq 1 - x$ für $x \in (0,1)$ und $\mathbb{P}_\Theta = \{\mathbb{P}_\theta \,|\theta \in \Theta = [0,1]\}$ eine Verteilungfamilie mit Lebesguedichten

$$\mathbb{f}_\theta(x) = \frac{1-\theta}{\varphi(\theta)}\left(1 - \frac{|x-\theta|}{\varphi(\theta)}\right)_+ \mathbb{1}_{[0,1)}(\theta) + \frac{\theta}{2}\mathbb{1}_{[-1,1]}(x).$$

Ziel ist es für $X \odot \mathbb{P}_\Theta^n := \{\mathbb{P}_\theta^n \,|\, \mathbb{P}_\theta \in \mathbb{P}_\Theta\}$ und für ein geeignetes φ zu sehen, dass für alle $\theta \in [0,1]$ jeder Maximum-Likelihood-Schätzer fast sicher gegen Eins konvergiert und somit insbesondere nicht konsistent ist.

a) Zeigen Sie, dass für $\theta \in [0,1]$ die Funktion $\mathbb{f}_\theta$ eine Wahrscheinlichkeitsdichte bezüglich des Lebesguemaßes auf $\mathbb{R}$ ist und, dass sie den Träger $[-1,1]$ besitzt.

b) Zeigen Sie, dass ein Maximum-Likelihood-Schätzer $\widehat{\theta}_n$ exisitiert.

c) Zeigen Sie, dass für $0 \leq \theta < 1, x \in \mathbb{R}$ $\mathbb{f}_\theta(x) < 1/\varphi(\theta) + 1/2$ gilt und folgern Sie daraus, dass für die Loglikelihood-Funktion ℓ_n bei n Beobachtungen $x_1, \dots, x_n$ und für jedes $\alpha < 1$

$$\max_{\theta\in[0,\alpha]} \frac{\ell_n(\theta)}{n} \leq \log\left(\frac{1}{\varphi(\alpha)} + \frac{1}{2}\right) < \infty$$

gilt.

d) Mit $x_{(n)} := \max_{i\in[\![1,n]\!]} x_i$ gilt für $x \in \Omega_n := \{x \in [-1,1]^n | 0 < x_{(n)} < 1\}$

$$\max_{\theta\in[0,1]} \frac{\ell_n(\theta)}{n} \geq \frac{n-1}{n}\log\left(\frac{x_{(n)}}{2}\right) + \frac{1}{n}\log\left(\frac{1-x_{(n)}}{\varphi(x_{(n)})}\right)$$

und zeigen Sie, dass $\mathbb{P}_\theta^n[\Omega_n] \to 1$ für alle $\theta \in \Theta$.

Verwenden Sie ohne Beweis, dass $n^{1/4}(1-x_{(n)}) \xrightarrow{\mathbb{P}_\theta^n} 0$. Definieren Sie für beliebige $\alpha \in (0,1)$ die Menge $\Xi_n^\alpha := \{x \in (-1,1)^n | n^{1/4}(1-x_{(n)}) < \frac{1}{(\log(1/\varphi(\alpha)+1/2)+2)^{1/4}}\}$.

e) Wählen Sie $\varphi(\theta) := (1-\theta)\exp(-(1-\theta)^{-4}+1)$ und zeigen Sie, dass für alle $\varepsilon > 0$ gilt

$$\mathbb{P}_\theta^n[|\widehat{\theta}_n - 1| > \varepsilon] \to 0.$$

Aufgabe 2 (5 Bonuspunkte)

Es sei $\Theta \subset \mathbb{R}^k$ kompakt sowie $(X_n(\theta), \theta \in \Theta)_{n\geq 1}$ und $(X(\theta), \theta \in \Theta)$ stetige Prozesse mit $X_n(\theta) \xrightarrow{\mathbb{P}} X(\theta)$ für $n \to \infty$ für alle $\theta \in \Theta$. Zeigen Sie:

a) $\forall \delta > 0 : \exists U_\delta \subset \Theta$ endlich: $\sup_{\theta\in\Theta} \inf_{\theta'\in U_\delta} \|\theta - \theta'\| \leq \delta$.

b) Mit dem Stetigkeitsmodul $\omega_\delta(f) := \sup_{|\theta_1-\theta_2|\leq\delta} |f(\theta_1) - f(\theta_2)|$ gilt

$$\sup_{\theta\in\Theta} |X_n(\theta) - X(\theta)| \leq \omega_\delta(X_n) + \omega_\delta(X) + \max_{\theta'\in U_\delta} |X_n(\theta') - X(\theta')|.$$

c) Es gilt $\max_{\theta\in U_\delta} |X_n(\theta) - X(\theta)| \xrightarrow{\mathbb{P}} 0$ für $n \to \infty$ sowie $\omega_\delta(X) \to 0$ fast sicher für $\delta \to 0$.

d) Schließen Sie nun aus der Straffheitsbedingung

$$\forall \varepsilon, \eta > 0 : \exists \delta > 0 : \limsup_{n\to\infty} \mathbb{P}[\omega_\delta(X_n) \geq \varepsilon] \leq \eta$$

die gleichmäßige Konvergenz, das heißt $\sup_{\theta\in\Theta} |X_n(\theta) - X(\theta)| \xrightarrow{\mathbb{P}} 0$ für $n \to \infty$.

Aufgabe 3 (5 Bonuspunkte)

Für zwei Wahrscheinlichkeitsmaße $\mathbb{P}, \mathbb{Q}$ auf dem Raum $(\mathcal{X}, \mathscr{X})$ bezeichnet

$$H^2(\mathbb{P}, \mathbb{Q}) := \int_{\mathcal{X}} \left(\sqrt{\mathbb{p}(x)} - \sqrt{\mathbb{q}(x)}\right)^2 \mu(dx)$$

den quadrierten Hellinger-Abstand, wobei μ ein $\mathbb{P}$ und $\mathbb{Q}$ dominierendes σ-endliches Maß ist (wähle zum Beispiel $\mu = \mathbb{P} + \mathbb{Q}$) und $\mathbb{p}, \mathbb{q}$ die entsprechenden μ-Dichten bezeichnet. Zeigen Sie:

a) Der Hellinger-Abstand H is unabhängig vom dominierenden Maß μ und definiert eine Metrik.

b) Es gilt $H^2(\mathbb{P}, \mathbb{Q}) = 2 - 2\int_{\mathcal{X}} \sqrt{\mathbb{p}(x)}\sqrt{\mathbb{q}(x)}\mu(dx) \in [0, 2]$.

c) Für Produktmaße $\mathbb{P} = \bigotimes_{i=1}^n \mathbb{P}_i, \mathbb{Q} = \bigotimes_{i=1}^n \mathbb{Q}_i$ gilt

$$H^2(\mathbb{P}, \mathbb{Q}) = 2\left(1 - \prod_{i=1}^n \left(1 - \frac{1}{2}H^2(\mathbb{P}_i, \mathbb{Q}_i)\right)\right) \leq \sum_{i=1}^n H^2(\mathbb{P}_i, \mathbb{Q}_i).$$

Hinweis: Verwenden Sie ohne Beweis, dass Folgendes gilt: $\mathbb{P}_i \ll \nu_i$ mit Dichte $\mathbb{p}_i$ für $i \in [\![1, n]\!]$, $\mathbb{P}_i$ W-maß, ν_i σ-endliches Maß. Dann gilt $\bigotimes_{i=1}^n \mathbb{P}_i \ll \bigotimes_{i=1}^n \mathbb{Q}_i$ mit Dichte $\mathbb{p}(x) = \prod_{i=1}^n \mathbb{p}_i(x_i)$.

Aufgabe 4 (5 Bonuspunkte)

Für zwei Wahrscheinlichkeitsmaße $\mathbb{P}, \mathbb{Q}$ auf dem Raum $(\mathcal{X}, \mathscr{X})$ bezeichnet

$$\| \mathbb{P} - \mathbb{Q} \|_{TV} := \sup_{A \in \mathscr{X}} |\mathbb{P}[A] - \mathbb{Q}[A]|$$

den Totalvariations-Abstand. Seien $\mathbb{p}, \mathbb{q}$ μ-Dichten von $\mathbb{P}$ und $\mathbb{Q}$.

a) Zeigen Sie, dass $\| \mathbb{P} - \mathbb{Q} \|_{TV} = \frac{1}{2} \int |\, \mathbb{q} - \mathbb{p} \,| d\mu = 1 - \int \min(\mathbb{p}, \mathbb{q}) d\mu$.

b) Zeigen Sie, dass $(\int \sqrt{\mathbb{p}\,\mathbb{q}} d\mu)^2 \leq 2 \int \min(\mathbb{p}, \mathbb{q}) d\mu$.

c) Weisen Sie die Ungleichung von Le Cam nach

$$\frac{1}{2}H^2(\mathbb{P}, \mathbb{Q}) \leq \| \mathbb{P} - \mathbb{Q} \|_{TV} \leq H(\mathbb{P}, \mathbb{Q})\sqrt{1 - \frac{1}{4}H^2(\mathbb{P}, \mathbb{Q})}.$$

Anmerkung: Insbesondere konvergiert eine Folge $(\mathbb{P}_n)_{n \geq 1}$ gegen $\mathbb{P}$ im Totalvariationsabstand, wenn die Konvergenz im Hellinger-Abstand vorliegt.

Abgabe:
In Zweiergruppen, bis spätestens Montag, den **22. Juli 2019, 11:15 Uhr**.
(Die Übungszettelkästen sind im 1. OG, INF 205, vor dem Dekanat.)

Homepage:
https://sip.math.uni-heidelberg.de/vl/st1-ss19/