Statistik 1
Prof. Dr. Jan Johannes
Sergio Brenner Miguel
Sommersemester 2019

UNIVERSITÄT HEIDELBERG ZUKUNFT SEIT 1386

12. Übungsblatt

Aufgabe 1	Aufgabe 2	Aufgabe 3	Aufgabe 4	Vorbereitung	Σ

Aufgabe 1 (4 Punkte)

Es sei $X \circleddash \mathbb{P}_\Theta := \{\mathrm{Exp}_\theta^n | \theta \in \Theta := (0, \infty)\}$. Konstruieren Sei einen gleichmäßigen besten Test zum Niveau $\alpha \in (0, 1)$ für das Testproblem $H_0 : \theta \leq 1$ gegen $H_1 : \theta > 1$. Geben Sie für $n = 1$ den kritischen Wert explizit an.

Aufgabe 2 (4 Punkte)

Für die Zulassung eines neuen Medikaments (zu evtl. teuerem Preis) muss statistisch nachgewiesen werden, dass dessen Heilungsrate (= Anteil der geheilten Patienten bei Anwendung des Medikaments) $\theta \in (0, 1)$ höher als die Heilungsrate $\theta_0 \in (0, 1)$ der derzeit üblichen Medikamente auf dem Markt ist. Zu diesem Zwecke werden klinische Studien mit einer bestimmten Anzahl n von Patienten $X_1, \ldots, X_n$ durchgeführt, wobei bei einem Heilungserfolg bei Person $i \in [\![1, n]\!]$ $X_i = 1$ gesetzt wird, ansonsten $X_i = 0$. Ein neues Medikament wird als besser erachtet, wenn ein Test mit einem vorgegebenen Niveau $\alpha \in (0, 1)$ zu den Hypothesen $H_0 : \theta \leq \theta_0$ gegen $H_1 : \theta > \theta_0$ die Alternative H_1 liefert. Wir nehmen an, dass die Patienten unabhängig voneinander geheilt werden oder nicht.

a) Es sei $\theta_0 = 0.5$ und $n = 10$. Bestimmen Sie jeweils für $\alpha_1 = 0.05$ und $\alpha_2 = 0.1$ einen gleichmäßig besten Test φ_1 (bzw. φ_2) zum Niveau α_1 (bzw. α_2). Sei für eine Stichprobe $X_1, \ldots, X_{10}$ die Anzahl der geheilten Patienten 8. Bestimmen Sie die Testentscheidung von φ_1 und φ_2.

b) Angenommen, das neue Medikament hätte tatsächlich eine Heilungsrate von 60%. Wie groß wäre der Fehler 2. Art des Tests φ_1?

Aufgabe 3 (4 Punkte)

Gegeben seien unabhängige Zufallsvariablen $X_1, \dots, X_n, Y_1, \dots, Y_m$ wobei $X_i \sim \mathrm{Exp}_{\lambda_1}, i \in [\![1, n]\!]$ und $Y_j \sim \mathrm{Exp}_{\lambda_2}, j \in [\![1, m]\!]$. Wir wollen die Hypothesen $H_0 : \lambda_1 \leq \lambda_2$ gegen $H_1 : \lambda_1 > \lambda_2$ testen. Gehen Sie dazu wie folgt vor:

a) Zeigen Sie, dass mit $\theta := \lambda_1 - \lambda_2$ und $\xi := \lambda_1$ die Verteilungsfamilie $\mathbb{P}_{\theta,\xi} := \mathbb{P}^{X_1,\dots,X_n,Y_1,\dots,Y_m}$ eine natürliche 2-parametrische Exponentialfamilie in $(\theta, \xi) \in \{(\theta, \xi) \in \mathbb{R} \times (0, \infty) | \theta < \xi\}$ ist und bestimmen Sie die zugehörige Statistiken $S, T : \mathbb{R}^{n+m} \to \mathbb{R}$.

b) Geben Sie einen gleichmäßig besten unverfälschten Test φ_o für die Hypothese H_0 gegen H_1 zum Niveau $\alpha \in (0, 1)$ mit Bestimmungsgleichung für $k^\alpha(t)$. (Bestimmen Sie nicht k^α explizit.)

c) Zeigen Sie, dass unter $\mathbb{P}_{0,\xi}$ die Statistiken

$$U(x, y) := \frac{\sum_{j=1}^m y_j}{\sum_{i=1}^n x_i + \sum_{j=1}^m y_j}, \text{ und } T(x, y) := -\sum_{i=1}^n x_i - \sum_{j=1}^m y_j$$

stochastisch unabhängig sind.

d) Bestimmen Sie $\widetilde{k}^\alpha$, so dass für $\widetilde{\varphi}_o := \mathbb{1}_{U > \widetilde{k}^\alpha}$ gilt

$$\varphi_o = \widetilde{\varphi}_o \quad \mathbb{P}^{(S,T)}_{\Theta_{\text{nat}}} \text{ −fast überall.}$$

Aufgabe 4 (4 Punkte)

Gegeben seien unabhängige Zufallsvariablen $X_1, \dots, X_n \sim \Gamma_{(p,\beta)}$ für $p, \beta \in (0, \infty)$.

a) Zeigen Sie, dass für $X_1 \sim \Gamma_{(p,\beta)}$ gilt: $\beta \cdot X_1 \sim \Gamma_{(p,1)}$.

b) Wir wollen die Hypothesen $H_0 : p \leq p_0$ gegen $H_1 : p > p_0$ testen, wobei β unbekannt ist und $p_0 \in (0, \infty)$. Zeigen Sie, dass ein gleichmäßig bester unverfälschter Test φ_0 für die Hypothesen H_0 gegen H_1 zum Niveau $\alpha \in (0, 1)$ gegeben ist durch

$$\varphi_o = \mathbb{1}_{\widetilde{S} > \widetilde{k}^\alpha}, \quad \widetilde{S}(x) := \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \log(x_i) - \log\left(\sum_{i=1}^n x_i\right),$$

wobei $\widetilde{k}^\alpha$ das $(1 - \alpha)$-Quantil der Verteilung $\widetilde{S}(Z_1, \dots, Z_n)$ ist mit $Z_1, \dots, Z_n \overset{uiv}{\sim} \Gamma_{(p_0,1)}$.
Hinweis: Gehen Sie vor wie in Aufgabe 3 und verwenden Sie Aufgabenteil a).

Klausurvorbereitung:
Die folgende Aufgabe dient zur Wiederholung des Vorlesungsstoffes und als Hilfsmittel zum gezielten Lernen auf die Klausur.

Aufgabe 5 (Vorbereitung; 4 Bonuspunkte)

Bei einer Inventur wird eine große Kiste mit Schrauben gefunden. Es ist unklar, ob die enhaltenen Schrauben erster Klasse oder zweiter Klasse sind. Sowohl Schrauben erster als auch zweiter Klasse haben durchschnittlich eine Länge von $\mu_0 = 5$ mm, allerdings ist die zugehörige Standardabweichung bei Schrauben erster Klasse nur $\sigma_0 = 0.1$mm, während Sie bei Schrauben zweiter Klasse größer ist (üblicherweise $\sigma_1 = 0.3$ mm). Um die Kiste zuzuordnen werden $n = 10$ Schrauben entnommen und die Länge gemessen. Wir erhalten die folgenden Messergebnisse $X_1, \dots X_n$

4.8	5.1	5.3	5.1	5.4	4.9	4.6	5.2	5.5	4.4

a) Gehen Sie davon aus, dass die $X = (X_1, \dots, X_n)^t \circleddash \{\mathrm{N}^n_{(\mu_0, \sigma^2)} | \sigma \in (0, \infty)\}$. Bestimmen Sie einen gleichmäßig besten Test zum Niveau α für die Hypothesen $H_0 : \sigma \leq \sigma_0$ gegen $H_1 : \sigma > \sigma_0$.

b) Wie lautet die Testentscheidung zum Niveau $\alpha = 0.05$ auf Basis der gemessenen Schraubenlängen ?

c) Berechnen Sie den Fehler 2. Art des Tests aus Aufgabenteil a) für den Fall, dass die Schrauben tatsächlich zweiter Klasse sind, das heißt $\sigma_1 = 0.3$mm.

Abgabe:
In Zweiergruppen, bis spätestens Montag, den **15. Juli 2019, 11:15 Uhr**.
(Die Übungszettelkästen sind im 1. OG, INF 205, vor dem Dekanat.)

Homepage:
https://sip.math.uni-heidelberg.de/vl/st1-ss19/

Verteilungen und deren Charakteristika

Name	$\mathbb{P}_\theta$	Θ	dominierendes Maß	Dichte	Erwartungswert	Varianz	Zusatzinfos
Exponential	Exp_θ	$(0,\infty)$	Lebesgue auf $\mathbb{R}$	$\mathbb{f}_\theta(x) = \theta\exp(-\theta x)\mathbb{1}_{(0,\infty)}(x)$	$\frac{1}{\theta}$	$\frac{1}{\theta^2}$	$\mathrm{Exp}_\theta = \Gamma_{(1,\theta)}$, $X \sim \mathrm{Exp}_\theta \Rightarrow \theta X \sim \mathrm{Exp}_1$
Gamma	$\Gamma_{(b,p)}$	$(0,\infty)^2$	Lebesgue auf $\mathbb{R}$	$\mathbb{f}_{b,p}(x) = \frac{p^b}{\Gamma(b)}x^{b-1}\exp(-px)\mathbb{1}_{(0,\infty)}(x)$	$\frac{b}{p}$	$\frac{b}{p^2}$	$\Gamma_{(b_1,p)} * \Gamma_{(b_2,p)} = \Gamma_{(b_1+b_2,p)}$*; $\Gamma(x+1) = x\Gamma(x), x > 0; \Gamma(1) = 1$
Beta	$\mathrm{Beta}_{(p,q)}$	$(0,\infty)^2$	Lebesgue auf $\mathbb{R}$	$\mathbb{f}_{p,q}(x) = \frac{\Gamma(p)\Gamma(q)}{\Gamma(p+q)}x^{p-1}(1-x)^{q-1}\mathbb{1}_{(0,1)}(x)$	$\frac{p}{p+q}$	$\frac{pq}{(p+q+1)(p+q)^2}$	$X \sim \Gamma_{(n,1)}, Y \sim \Gamma_{(m,1)}$ unabh. $\Rightarrow \frac{X}{X+Y} \sim \mathrm{Beta}_{(n,m)}$
Uniform	$\mathrm{U}_{[a,b]}$	$a, b \in \mathbb{R}, a < b$	Lebesgue auf $\mathbb{R}$	$\mathbb{f}_{a,b}(x) = \frac{1}{b-a}\mathbb{1}_{[a,b]}(x)$	$\frac{a+b}{2}$	$\frac{(b-a)^2}{12}$	-
Geshift. Expo	$\mathrm{Gesh}_{(\theta,\lambda)}$	$\mathbb{R}\times(0,\infty)$	Lebesgue auf $\mathbb{R}$	$\mathbb{f}_{\theta,\lambda}(x) = \lambda\exp(-\lambda(x-\theta))\mathbb{1}_{[\theta,\infty)}(x)$	-	-	$X \sim \mathrm{Gesh}_{(\theta,\lambda)}$ dann $X - \theta \sim \mathrm{Exp}_\lambda$
Pareto	$\mathrm{Pareto}_{(\alpha,x_0)}$	$(0,\infty)^2$	Lebesgue auf $\mathbb{R}$	$\mathbb{f}_{\alpha,x_0}(x) = \frac{\alpha x_0^\alpha}{x^{\alpha+1}}\mathbb{1}_{[x_0,\infty)}(x)$	-	-	-
Laplace	$\mathrm{Lap}_{(\mu,\sigma)}$	$\mathbb{R}\times(0,\infty)$	Lebesgue auf $\mathbb{R}$	$\mathbb{f}_{\mu,\sigma}(x) = \frac{1}{2\sigma}\exp\left(-\frac{\lvert x-\mu\rvert}{\sigma}\right)$	μ	$2\sigma^2$	-
Binomial	$\mathrm{Bin}_{(n,p)}$	$\mathbb{N}\times(0,1)$	Zählmaß auf $[\![0,n]\!]$	$\mathbb{p}_{n,p}(k) = \binom{n}{k}p^k(1-p)^{n-k}$	np	$np(1-p)$	$\mathrm{Bin}_{(n,p)} * \mathrm{Bin}_{(m,p)} = \mathrm{Bin}_{(n+m,p)}$*
Poisson	Poi_θ	$(0,\infty)$	Zählmaß auf $\mathbb{N}_0$	$\mathbb{p}_\theta(k) = \frac{\theta^k}{k!}\exp(-\theta)$	θ	θ	$\mathrm{Poi}_{\theta_1} * \mathrm{Poi}_{\theta_2} = \mathrm{Poi}_{\theta_1+\theta_2}$*
Geometrisch	Geom_θ	$(0,1)$	Zählmaß auf $\mathbb{N}$	$\mathbb{p}_\theta(k) = \theta(1-\theta)^{k-1}$	$\frac{1}{\theta}$	$\frac{1-\theta}{\theta^2}$	-

* Soll heißen: $X_1 \sim \Gamma_{(b_1,p)}, X_2 \sim \Gamma_{(b_2,p)}$ unabhängig, dann $X_1 + X_2 \sim \Gamma_{(b_1+b_2,p)}$

Quantile und Verteilungsfunktionen

a) $X \sim \mathrm{Bin}_{(1,0.5)}$

k	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$\mathbb{P}[X \leq k]$	0.5	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1

b) $X \sim \mathrm{Bin}_{(10,0.5)}$

k	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$\mathbb{P}[X \leq k]$	0.00098	0.01074	0.05469	0.17188	0.37695	0.62305	0.82813	0.94531	0.98926	0.99902	1

c) $X \sim \mathrm{Bin}_{(10,0.6)}$

k	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$\mathbb{P}[X \leq k]$	0.000104	0.00167	0.01229	0.05476	0.16623	0.36689	0.61771	0.83271	0.95364	0.99395	1

d) $X \sim \mathrm{N}_{(5,1)}$. Sei F_X^{-1} die inverse Funktion von $F_X(x) := \mathbb{P}[X \leq x]$.

x	0.004	0.01	0.05	0.1	0.9	0.95	0.99	0.996
$F_X^{-1}(x)$	2.34793	2.67365	3.35514	3.71844	6.28155	6.64485	7.32634	7.65207

e) $X \sim \chi_1^2$. Sei F_X^{-1} die inverse Funktion von $F_X(x) := \mathbb{P}[X \leq x]$.

x	0.004	0.01	0.05	0.1	0.9	0.95	0.99	0.996
$F_X^{-1}(x)$	0.00002	0.00015	0.00393	0.01579	2.70554	3.84145	6.634897	8.283815

f) $X \sim \chi_{10}^2$. Sei F_X^{-1} die inverse Funktion von $F_X(x) := \mathbb{P}[X \leq x]$.

x	0.004	0.01	0.05	0.1	0.9	0.95	0.99	0.996
$F_X^{-1}(x)$	2.04298	2.55821	3.94029	4.86518	15.98717	18.30703	23.20925	25.81300