Statistik 1
Prof. Dr. Jan Johannes
Sergio Brenner Miguel
Sommersemester 2019

UNIVERSITÄT HEIDELBERG
ZUKUNFT SEIT 1386

11. Übungsblatt

Aufgabe 1	Aufgabe 2	Aufgabe 3	Aufgabe 4	Vorbereitung	Σ

Aufgabe 1 (4 Punkte)

Wir definieren Poi_0 als das Punktmaß in der Null auf $\mathbb{N}_0$, das heißt für $Y \sim \mathrm{Poi}_0$ gilt $\mathbb{P}_0[Y=0]=1$. Es sei $X \odot \{\mathrm{Poi}_\lambda^n | \lambda \geq 0\}$.

a) Bestimmen Sie den Maximum-Likelihood-Schätzer $\widehat{\lambda}_n$ von λ.

b) Nehmen Sie an, dass $\lambda > 0$ ist. Zeigen Sie, dass $\widehat{\lambda}_n$ konsistent ist und, dass $\sqrt{n}\frac{\widehat{\lambda}_n-\lambda}{\sqrt{\lambda}} \xrightarrow{D} \mathrm{N}_{(0,1)}$.
Hinweis: Sie dürfen den Zentralen Grenzwertsatz 31.02 im Skript der "Einführung in die Wahrscheinlichkeitstheorie und Statistik" des WS 18/19 verwenden. Diese Aussage dürfen Sie auch in der Klausur verwenden.

Aufgabe 2 (4 Punkte)

Es sei $X \odot \{\mathrm{U}_{[0,\theta]}^n | \theta > 0\}$.

a) Weisen Sie nach, dass $\widehat{\theta}_n(X) := \max(X_1, \dots, X_n)$ ein Maximum-Likelihood-Schätzer für θ ist.

b) Zeigen Sie, dass $n(\theta - \widehat{\theta}_n(X)) \xrightarrow{D} \mathrm{Exp}_{1/\theta}$ für $n \to \infty$ gilt.

Hinweis: Verwenden Sie Satz 29.22 des Skriptes "Einführung in die Wahrscheinlichkeitstheorie und Statistik" WS 18/19.

Aufgabe 3 (4 Punkte)

Wir betrachten die Familie $\mathbb{P}_\Theta = \{\mathrm{U}_{[0,\theta]}^n | \theta \in \Theta = (0,\infty)\}$.

a) Zeigen Sie, dass $\mathbb{P}_\Theta$ einen monoton wachsenden (bzw. isotonen) Dichtequotienten in $S(x) := x_{(n)} = \max(x_1, \dots, x_n)$ besitzt.

b) Bestimmen Sie für $X \circledcirc \mathbb{P}_\Theta$ einen gleichmäßig besten Test zum Niveau $\alpha \in (0,1)$ für das Testproblem $H_0 : \theta \le \theta_0$ gegen $H_1 : \theta > \theta_0$ mit festem $\theta_0 \in \Theta$.

c) Untersuchen Sie für $\alpha \in (0,1)$ den Test $\varphi_\alpha(x) := \max(\alpha, \mathbb{1}_{(\theta_o,\infty)}(x_{(n)}))$ auf Optimalität, das heißt entscheiden Sie, ob es sich um einen gleichmäßig besten Test zum Niveau α für das Testproblem aus Aufgabenteil b) handelt.

Aufgabe 4 (4 Punkte)

Beweisen Sie die Verallgemeinerung des Neyman-Pearson-Lemmas (Lemma 21.31) aus der Vorlesung.
Hinweis: Orientieren Sie sich am Beweis des Neyman-Pearson-Lemmas (Lemma 21.16).

Klausurvorbereitung:
Die folgende Aufgabe dient zur Wiederholung des Vorlesungsstoffes und als Hilfsmittel zum gezielten Lernen auf die Klausur.

Aufgabe 5 (Vorbereitung; 4 Bonuspunkte)

Wir betrachten die Familie $\mathbb{P}_{\Theta\times\Lambda} := \{\mathbb{P}_{\theta,\lambda} \,|\, \lambda \in \Lambda := (0,\infty), \theta \in \Theta := \mathbb{R}\}$ der geshifteten Exponentialverteilungen mit Dichten

$$\mathbb{f}_{\theta,\lambda}(x) = \lambda \exp(-\lambda(x-\theta))\mathbb{1}_{[\theta,\infty)}(x) \text{ für } x \in \mathbb{R}\,.$$

a) Sei $\lambda > 0$ fest und sei $X = (X_1, \dots, X_n)^t \circledcirc \{\mathbb{P}^n_{\theta,\lambda} \,|\, \theta \in \Theta\}$. Bestimmen Sie den Pitman-Schätzer für θ als Funktion von X.

b) Sei $\theta \in \mathbb{R}$ fest und sei $Y = (Y_1, \dots, Y_n)^t \circledcirc \{\mathbb{P}^n_{\theta,\lambda} \,|\, \lambda \in \Lambda\}$. Bestimmen Sie den Kleinste-Varianz-Schätzer für λ als Funktion von Y.

Abgabe:
In Zweiergruppen, bis spätestens Montag, den **08. Juli 2019, 11:15 Uhr**.
(Die Übungszettelkästen sind im 1. OG, INF 205, vor dem Dekanat.)

Homepage:
https://sip.math.uni-heidelberg.de/vl/st1-ss19/