Statistik 1
Prof. Dr. Jan Johannes
Sergio Brenner Miguel
Sommersemester 2019

UNIVERSITÄT HEIDELBERG
ZUKUNFT SEIT 1386

09. Übungsblatt

Aufgabe 1	Aufgabe 2	Aufgabe 3	Aufgabe 4	Vorbereitung	Σ

Aufgabe 1 (4 Punkte)

Sei $(\mathcal{X}, \mathscr{X}, \mathbb{P}_\Theta)$ ein statistisches Experiment derart, dass ein Kleinste-Varianz-Schätzer $\widehat{\gamma}^*$ für den interessierenden Parameter $\gamma : \Theta \to \mathbb{R}$ existiere. Sei weiterhin Δ die Klasse der Schätzer für γ mit endlicher Varianz, das heißt die Klasse aller reellwertigen Statistiken $\widehat{\gamma}$ mit $\mathbb{E}_\theta[\widehat{\gamma}^2] < \infty$ für alle $\theta \in \Theta$ und sei $\widehat{\gamma}_0 \in \Delta$ ein erwartungstreuer Schätzer für γ. Sei $\mathcal{U} := \{U \in \Delta | \forall \theta \in \Theta : \mathbb{E}_\theta[U] = 0\}$.

a) Zeigen Sie, dass es für jeden erwartungstreuen Schätzer $\widehat{\gamma} \in \Delta$ ein $U \in \mathcal{U}$ existiert, sodass $\widehat{\gamma} = \widehat{\gamma}_0 + U$ gilt.

b) Sei $\widehat{\gamma}_0$ ein Kleinste-Varianz-Schätzer. Definieren Sie für beliebige $U \in \mathcal{U}$ und $a \in \mathbb{R}$ den Schätzer $\widehat{\gamma}_a = \widehat{\gamma}_0 + aU$ um zu zeigen, dass $\mathbb{C}\mathrm{ov}_\theta[\widehat{\gamma}_0, U] = 0$ für alle $\theta \in \Theta$ und für alle $U \in \mathcal{U}$ gilt.

c) Zeigen Sie die Rückrichtung im Aufgabenteil b): Es gelte nun für $\widehat{\gamma}_0$, dass $\mathbb{C}\mathrm{ov}_\theta[\widehat{\gamma}_0, U] = 0$ für alle $\theta \in \Theta$ und für alle $U \in \mathcal{U}$. Schließen Sie, dass dann $\mathbb{V}\mathrm{ar}_\theta[\widehat{\gamma}_0] = \mathbb{C}\mathrm{ov}_\theta[\widehat{\gamma}, \widehat{\gamma}_0]$ für alle $\theta \in \Theta$ und alle erwartungstreuen $\widehat{\gamma} \in \Delta$ gilt und zeigen Sie damit, dass $\widehat{\gamma}_0$ ein Kleinste-Varianz-Schätzer ist.

Aufgabe 2 (4 Punkte)

Es sei $X = (X_i)_{i \in [\![1,n]\!]} \odot \{\mathrm{Exp}_\theta^n | \theta \in \Theta := (0, \infty)\}$, wobei $n \geq 3$ ist.

a) Zeigen Sie, dass $\widehat{\theta}_o(X) := \frac{n-1}{\sum_{i=1}^n X_i}$ ein erwartungstreuer Schätzer für θ ist.

b) Zeigen Sie, dass $\widehat{\theta}_o(X)$ ein Kleinste-Varianz-Schätzer für θ ist.

c) Überprüfen Sie, ob $\widehat{\theta}_o(X)$ Cramér-Rao-effizient ist (vergleiche Beispiel 16.16).

Hinweis: Sind $X \sim \Gamma_{(m,\theta)}$ und $Y \sim \Gamma_{(n,\theta)}$ stochastisch unabhängige Zufallsvariablen, so gilt $X + Y \sim \Gamma_{(m+n,\theta)}$. Ferner ist $\mathrm{Exp}_\theta = \Gamma_{(1,\theta)}$.

Aufgabe 3 (4 Punkte)

Beim Vergleich zweier Medikamente tritt das folgende Zweistichprobenproblem auf. Es bezeichne $X = (X_1, \dots, X_n)^t$ dier Behandlungserfolge eines neuen Medikaments und $Y = (Y_1, \dots, Y_m)^t$ seien die entsprechenden Ergebnisse eines herkömmlichen Medikaments in einer Kontrollgruppe.
Seien $X \sim \mathrm{N}^n_{(\mu,\sigma^2)}, Y \sim \mathrm{N}^m_{(\eta,\sigma^2)}$ und X, Y stochastisch unabhängig, wobei $\mu, \eta \in \mathbb{R}$ und $\sigma^2 > 0$ unbekannt sind. Sei weiter $\theta = (\mu, \eta, \sigma^2)$ und $\gamma(\theta) := \mu - \eta$.

a) Sei $Z = (X_1, \dots, X_n, Y_1, \dots, Y_m)^t$. Bestimmen Sie die Likelihoodfunktion der Verteilung von Z bezüglich des Parameters $\theta = (\mu, \eta, \sigma^2)$ und zeigen Sie, dass für die zugehörige Fisher-Informationsmatrix gilt

$$\mathcal{I}(\theta) = \begin{pmatrix} \frac{n}{\sigma^2} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{m}{\sigma^2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{n+m}{2\sigma^4} \end{pmatrix}.$$

b) Zeigen Sie, dass für die Cramér-Rao Schranke des Modells im Aufgabenteil a) gilt

$$\langle \mathcal{I}_\theta^{-1} \dot\gamma(\theta), \dot\gamma(\theta) \rangle = \left(\frac{1}{n} + \frac{1}{m} \right) \sigma^2, \quad \theta \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times (0, \infty).$$

.

c) Zeigen Sie, dass $\widehat{\gamma}(Z) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i - \frac{1}{m} \sum_{i=1}^m Y_i$ ein Kleinste-Varianz-Schätzer für γ ist.

Aufgabe 4 (4 Punkte)

Es sei X ein zufälliger Vektor mit $X \circledsim \{\mathrm{N}^n_{(\theta,\sigma^2)} | \theta \in \mathbb{R}\}$ für ein festes $\sigma^2 > 0$. Berechnen Sie den Pitman-Schätzer $\widehat{\theta}_o(X)$ von θ mit

$$\widehat{\theta}_o(x) = \frac{\int_{\mathbb{R}} u \, \mathbb{f}_0(x_1 - u, \dots, x_n - u) du}{\int_{\mathbb{R}} \mathbb{f}_0(x_1 - v, \dots, x_n - v) dv}, \quad x \in \mathbb{R}^n .$$

Klausurvorbereitung:
Die folgende Aufgabe dient zur Wiederholung des Vorlesungsstoffes und als Hilfsmittel zum gezielten Lernen auf die Klausur.

Aufgabe 5 (Vorbereitung; 4 Bonuspunkte)

Nutzen Sie das Faktorisierungskriterium von Neyman, um zu zeigen, dass die angegebenen Statistiken erschöpfend für die jeweiligen Verteilungsfamilien sind.

a) $S(x_1, \ldots, x_n) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n x_i$ für $\{\mathrm{Bin}^n_{(1,\theta)} | \theta \in (0,1)\}$,

b) $S(x_1, \ldots, x_n) = (\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n \log(x_i), \min(x_1, \ldots, x_n))$ für $\{\mathrm{Pareto}^n_{(\theta_1,\theta_2)} | \theta = (\theta_1, \theta_2) \in (0,\infty)^2\}$.
Hinweis: Die Pareto-Verteilung $\mathrm{Pareto}_{(\alpha,x_0)}$ hat die Dichte $\mathbb{f}_{\alpha,x_o}(x) = \frac{\alpha x_0^\alpha}{x^{\alpha+1}} \mathbb{1}_{[x_0,\infty)}(x)$ bezüglich des Lebesgue-Maßes auf $\mathbb{R}$.

Zeigen Sie weiter:

c) $S(x) = x$ ist nicht vollständig für $\{U_{[\theta,\theta+1]} | \theta \in \mathbb{R}\}$ und

d) $S(x_1, \ldots, x_n) = \max(x_1, \ldots, x_n)$ ist vollständig für $\{U^n_{[0,\theta]} | \theta \in (0,\infty)\}$.

Abgabe:
In Zweiergruppen, bis spätestens Montag, den **24. Juni 2019, 11:15 Uhr**.
(Die Übungszettelkästen sind im 1. OG, INF 205, vor dem Dekanat.)

Homepage:
https://sip.math.uni-heidelberg.de/vl/st1-ss19/