Statistik 1
Prof. Dr. Jan Johannes
Sergio Brenner Miguel
Sommersemester 2019

UNIVERSITÄT HEIDELBERG
ZUKUNFT SEIT 1386

08. Übungsblatt

Aufgabe 1	Aufgabe 2	Aufgabe 3	Aufgabe 4	Vorbereitung	Σ

Aufgabe 1 (4 Punkte)

Sei $\mathcal{P} = \{\mathbb{P}_\theta : \theta \in \Theta\}$ eine Familie von Verteilungen auf $(\mathcal{X}, \mathscr{X})$.

a) Sei $S : (\mathcal{X}, \mathscr{X}) \to (\mathcal{Y}, \mathscr{Y})$ minimalerschöpfend und $V : (\mathcal{X}, \mathscr{X}) \to (\mathcal{Z}, \mathscr{Z})$ vollständig und erschöpfend. Zeigen Sie, dass dann bereits $S^{-1}(\mathscr{Y}) = V^{-1}(\mathscr{Z})$ gelten muss.
Hinweis: Beachten Sie hierzu, dass X $\mathcal{F}$-messbar genau dann, wenn $\mathbb{E}_\theta[X|\mathcal{F}] = X$ $\mathbb{P}_\theta$- fast sicher gilt.

b) Zeigen Sie: Existiert eine minimalerschöpfende Statistik S für $\mathcal{P}$, so ist jede vollständige und erschöpfende Statistik notwendigerweise minimalerschöpfend.
Hinweis: Verwenden Sie Teilaufgabe a).

Aufgabe 2 (4 Punkte)

Es sei X ein zufälliger Vektor mit $X \odot \{N^n_{(\mu,\sigma^2)} | \mu \in \mathbb{R}, \sigma > 0\}$.

a) Sei $\sigma^2 > 0$ beliebig aber fest. Zeigen Sie, dass $T(x) := \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n x_i$ eine erschöpfende und vollständige Statistik für $\mathcal{P}_\sigma := \{\mathrm{N}^n_{(\mu,\sigma^2)} | \mu \in \mathbb{R}\}$ ist.

b) Zeigen Sie, dass für die Statistik $S(x) := \sum_{i=1}^n (x_i - T(x))^2$ die Verteilung $\mathbb{P}^S_{(\mu,\sigma)}$ unabhängig von der Wahl $\mathbb{P}_{(\mu,\sigma)} \in \mathcal{P}_\sigma$ ist.

c) Zeigen Sie, dass $\overline{X}_n = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n X_i$ und $\sum_{i=1}^n (X_i - \overline{X}_n)^2$ stochastisch unabhängig sind.

Aufgabe 3 (4 Punkte)

Es sei X ein $\mathrm{Bin}^n_{(1,\pi)}$-verteilter zufälliger Vektor mit $n \geq 2$ und unbekanntem Parameter $\pi \in (0,1)$.

a) Zeigen Sie, dass die Statistik $S(x) := \sum_{i=1}^n x_i$ vollständig und erschöpfend ist für $\mathcal{P} = \{\mathrm{Bin}^n_{(1,\pi)} | \pi \in (0,1)\}$.

b) Zeigen Sie, dass der Kleinste-Varianz Schätzer für den abgeleiteten Parameter $\gamma(\pi) = \pi(1-\pi)$ gegeben ist durch $\widehat{\gamma}_o(X) = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^n (X_i - \overline{X}_n)^2$, wobei $\overline{X}_n := \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n X_i$.

Sei Y eine $\mathrm{Bin}_{(n,\pi)}$-verteilte Zufallsvariable mit unbekanntem Parameter $\pi \in (0,1)$.

c) Zeigen Sie, dass für den abgeleiteten Parameter $\gamma = 1/\pi$ kein erwartungstreuer Schätzer $\widehat{\gamma}(Y)$ existiert.

Aufgabe 4 (4 Punkte)

Es sei X eine Zufallsvariable mit $X \odot \{\mathbb{P}_\theta \,|\theta \in (0,1)\}$, $\mathbb{P}_\theta$ ist eine diskrete Wahrscheinlichkeitsverteilung auf $\mathbb{N} \cup \{-1, 0\}$ mit einer Dichte

$$\mathbb{p}_\theta(-1) = \theta, \qquad \mathbb{p}_\theta(k) = (1-\theta)^2\theta^k, \quad k = 0, 1, \ldots$$

bezüglich des Zählmaßes.

a) Zeigen Sie, dass $\widehat{\theta}_0(X) := \mathbb{1}_{\{-1\}}(X)$ erwartungstreu für θ ist. Definieren Sie für einen beliebigen erwartungstreuen Schätzer $\widehat{\theta}(X)$ für θ die Zufallsvariable $U(X) := \widehat{\theta}(X) - \mathbb{1}_{\{-1\}}(X)$ und bestimmen Sie $U(k), k \in \mathbb{N} \cup \{-1, 0\}$ um zu zeigen, dass für alle erwartungstreue Schätzer $\widehat{\theta}(X)$ ein $a \in \mathbb{R}$ existiert, sodass $\widehat{\theta}(X) = \mathbb{1}_{\{-1\}}(X) + aX =: \widehat{\theta}_a(X)$ gilt.

b) Bestimmen Sie die Varianz des Schätzers $\widehat{\theta}_a(X)$ und minimieren Sie über $a \in \mathbb{R}$ um zu zeigen, dass es keinen Kleinste-Varianz-Schätzer für θ gibt.
Hinweis: Verwenden Sie ohne Beweis, dass für $\theta \in (0,1) : \sum_{i=0}^\infty i^2\theta^i = (\theta + \theta^2)(1 - \theta)^{-3}$ gilt.

c) Zeigen Sie, dass alle erwartungstreue Schätzer $\widehat{\gamma}(X)$ des abgeleiteten Parameters $\gamma(\theta) = (1-\theta)^2$ der Form $\widehat{\gamma}(X) = \mathbb{1}_{\{0\}}(X) + aX =: \widehat{\gamma}_a(X)$ für ein $a \in \mathbb{R}$ sind.

d) Bestimmen Sie einen Kleinste-Varianz-Schätzer für $\gamma(\theta) = (1-\theta)^2$.

Klausurvorbereitung:
Die folgende Aufgabe dient zur Wiederholung des Vorlesungsstoffes und als Hilfsmittel zum gezielten Lernen auf die Klausur.

Aufgabe 5 (Vorbereitung; 4 Bonuspunkte)

Sei $\boldsymbol{\vartheta} \sim \Gamma_{(\alpha,\beta)}$ mit Wahrscheinlichkeitsdichte bezüglich des Lebesguemaßes

$$\mathbb{f}^{\boldsymbol{\vartheta}}(\theta) \propto \theta^{\alpha-1}\exp(-\beta\theta)\mathbb{1}_{(0,\infty)}(\theta), \quad \theta \in \mathbb{R},$$

wobei $\alpha, \beta > 0$. Hierbei bedeutet für zwei Funktion $f, g : \mathcal{X} \to \mathbb{R}$ die Notation $f(x) \propto g(x) \Leftrightarrow \exists C \in \mathbb{R} : \forall x \in \mathcal{X} : f(x) = cg(x)$.

a) Sei $C_{\alpha,\beta}$ die eindeutige Konstante, die die Gleichheit

$$\mathbb{f}^{\boldsymbol{\vartheta}}(\theta) = C_{\alpha,\beta}\theta^{\alpha-1}\exp(-\beta\theta)\mathbb{1}_{(0,\infty)}(\theta), \quad \theta \in \mathbb{R},$$

erfüllt. Zeigen Sie, dass $C_{\alpha,\beta} = \beta^\alpha/\Gamma(\alpha)$ gilt, wobei $\Gamma(\alpha) = \int_0^\infty x^{\alpha-1}\exp(-x)dx$ die Gammafunktion ist.

b) Zeigen Sie, dass $\mathbb{E}^{\boldsymbol{\vartheta}}[\boldsymbol{\vartheta}] = \alpha/\beta$ und $\mathbb{V}\mathrm{ar}^{\boldsymbol{\vartheta}}[\boldsymbol{\vartheta}] = \alpha/\beta^2$.

c) Sei für $\theta \in (0,\infty)$

   i) $X|\boldsymbol{\vartheta} = \theta \sim \mathrm{Poi}_\theta$;

   ii) $Y|\boldsymbol{\vartheta} = \theta \sim \Gamma_{s,\theta}, s > 0$ und

   iii) $Z|\boldsymbol{\vartheta} = \theta \sim \mathrm{N}_{(\mu,1/\theta)}, \mu \in \mathbb{R}$.

   Bestimmen Sie jeweils die Verteilung von $\boldsymbol{\vartheta}|X = k, \boldsymbol{\vartheta}|Y = y$ und $\boldsymbol{\vartheta}|Z = z$, wobei $k \in \mathbb{N}_0, y \in (0,\infty), z \in \mathbb{R}$.

d) Bestimmen Sie in den Fällen i)-iii) aus Aufgabenteil c) den Bayes-optimalen Schätzer des Parameters θ gegeben einer Stichprobe X(bzw. Y, Z) zum quadratischen Risiko. Bestimmen Sie für den Fall i) das quadratische Risiko des Bayesschätzer als Funktion in θ und das zugehörige Bayesrisiko.

Abgabe:
In Zweiergruppen, bis spätestens Montag, den **17. Juni 2019, 11:15 Uhr**.
(Die Übungszettelkästen sind im 1. OG, INF 205, vor dem Dekanat.)

Homepage:
https://sip.math.uni-heidelberg.de/vl/st1-ss19/