UNIVERSITÄT HEIDELBERG ZUKUNFT SEIT 1386

06. Übungsblatt

Aufgabe 1	Aufgabe 2	Aufgabe 3	Aufgabe 4	Aufgabe 5	Σ

Aufgabe 1 (4 Punkte)

Sei $(\mathcal{X}, \mathscr{X})$ ein messbarer Raum.

a) Seien $\mu, \nu \in \mathcal{M}(\mathscr{X})$ und $\mathbb{f} \in \mathscr{X}^+$ eine Dichte von ν gegeben μ mit $\mathbb{f}(x) > 0$ für alle $x \in \mathcal{X}$. Zeigen Sie, dass $\mathbb{g} := \frac{1}{\mathbb{f}}$ eine Dichte von μ gegeben ν ist.

b) Es seien $X_1, \dots, X_n$ unabhängig und identisch $\mathrm{N}_{(\mu,1)}$-verteilte Zufallsvariablen mit unbekanntem Parameter $\mu \in \mathbb{R}$. Geben Sie das zugehörige statistische Experiment $(\mathcal{X}, \mathscr{X}, \mathbb{P}_\Theta)$ auf $\mathcal{X} = \mathbb{R}^n$ an und zeigen Sie, dass es vom Produktmaß $\mathrm{N}^n_{(0,1)}$ dominiert wird.
Hinweis: Betrachten Sie zuerst das Lebesguemaß als dominierendes Maß und verwenden Sie dann den Aufgabenteil a).

c) Zeigen Sie, dass die Likelihoodfunktion des dominierten statistischen Experimentes im Aufgabenteil b) gegeben ist durch

$$L(\mu, x) = \exp\left(-\frac{1}{2}\left(\|x - \boldsymbol{\mu}\|^2 - \|x\|^2\right)\right)$$

mit $\boldsymbol{\mu} = (\mu, \dots, \mu)^t \in \mathbb{R}^n$.

d) Bestimmen Sie die Stelle $\mu \in \mathbb{R}$, an der die Likelihood-Funktion $L(\mu, x)$ zu gegebenem $x \in \mathbb{R}^n$ maximal ist. Betrachten Sie hierfür die Funktion $\mu \mapsto \ell(\mu, x) := \log(L(\mu, x))$.
Anmerkung: Dies ist der Wert des Maximum-Likelihood-Schätzers bei Vorliegen der Beobachtung $X = x$.

Aufgabe 2 (2 Punkte)

Es seien $(\mathcal{X}, \mathscr{X}, \mathbb{P}_\Theta)$ ein statistisches Experiment, S eine $(\mathcal{S}, \mathscr{S})$-wertige Statistik auf $(\mathcal{X}, \mathscr{X}, \mathbb{P}_\Theta)$ und $\mathbb{P}^S_\Theta$ die induzierte Verteilungsfamilie auf $(\mathcal{S}, \mathscr{S})$. Zeigen Sie unter Verwendung von Lemma 12.03, dass $(\mathcal{X}.\mathscr{X}, \mathbb{P}_\Theta)$ informativer als $(\mathcal{S}, \mathscr{S}, \mathbb{P}^S_\Theta)$ ist.

Aufgabe 3 (3 Punkte)

Seien X_1, X_2 unabhängig und identisch Poi_θ-verteilt mit unbekanntem Parameter $\theta \in (0, \infty) =: \Theta$, so dass $(X_1, X_2) \odot \mathbb{P}_\Theta = (\mathrm{Poi}^2_\theta)_{\theta \in \Theta}$, und $\mathbb{P}^T_\Theta$ sei die durch $T(X_1, X_2) := X_1 + X_2$ induzierte Verteilungsfamilie auf $(\mathbb{N}_0, 2^{\mathbb{N}_0})$.

a) Zeigen Sie, dass für $t \in \mathbb{N}, \theta \in \Theta : \mathbb{P}^T_\theta[\{t\}]] = \mathbb{P}_\theta[T = t] = \frac{(2\theta)^t}{t!} \exp(-2\theta)$ gilt.

b) Bestimmen Sie die bedingte Verteilung von (X_1, X_2) gegeben T.

c) Folgern Sie mithilfe des Aufgabenteils b), dass das statistische Experiment $(\mathbb{N}_0^2, 2^{\mathbb{N}_0} \times 2^{\mathbb{N}_0}, \mathbb{P}_\Theta)$ und das Bildexperiment $(\mathbb{N}_0, 2^{\mathbb{N}_0}, \mathbb{P}^T_\Theta)$ äquivalent sind.

Aufgabe 4 (4 Punkte)

Seien $X : (\Omega_0, \mathscr{A}_0) \to (\Omega_1, \mathscr{A}_1)$ und $T : (\Omega_1, \mathscr{A}_1) \to (\Omega_2, \mathscr{A}_2)$ zwei Statistiken und $\mathcal{P}$ eine Familie von Wahrscheinlichkeitsmaßen auf $(\Omega_0, \mathscr{A}_0)$. Zeigen Sie, dass dann gilt:

a) Ist $T \circ X$ erschöpfend für $\mathcal{P}$, dann ist T erschöpfend für $\mathcal{P}^X = \{\mathbb{P}^X \,|\, \mathbb{P} \in \mathcal{P}\}$.

b) Falls $\mathscr{A}_0 = X^{-1}(\mathscr{A}_1)$, so gilt in a) die Umkehrung.

Hinweis: Rekapitulieren Sie die Definition 12.08 (erschöpfend), Definition 03.10 (bedingter Erwartungswert), die Eigenschaft 01.15 und Eigenschaft 01.23.

Aufgabe 5 (3 Punkte)

Sei $\Theta = \{\theta = (\theta_1, \theta_2) \in \mathbb{R}^2 \,|\theta_1 < \theta_2\}$. Für $\theta \in \Theta$ sei $\mathbb{P}_\theta = \mathrm{U}_{[\theta_1, \theta_2]}$ die Gleichverteilung auf dem Intervall $[\theta_1, \theta_2]$ und es seien zusätzlich $X_1, \ldots, X_n \overset{iid}{\odot} \mathbb{P}_\Theta$. Zeigen Sie:

a) $S_1(X) := (\min_{i \in [\![1,n]\!]} X_i, \max_{i \in [\![1,n]\!]} X_i)$ ist erschöpfend für $\mathbb{P}^n_\Theta$.

b) Ist θ_1 bekannt, so ist $S_2(X) := \max_{i \in [\![1,n]\!]} X_i$ erschöpfend für $\{\mathbb{P}^n_{(\theta_1, \theta)} \,|\theta \in (\theta_1, \infty)\}$.

c) Ist θ_2 bekannt, so ist $S_3(X) := \min_{i \in [\![1,n]\!]} X_i$ erschöpfend für $\{\mathbb{P}^n_{(\theta, \theta_2)} \,|\theta \in (-\infty, \theta_2)\}$.

Hinweis: Verwenden Sie das Faktorisierungskriterium von Neyman.

Abgabe:
In Zweiergruppen, bis spätestens Dienstag, den **03. Juni 2019, 11:15 Uhr**.
(Die Übungszettelkästen sind im 1. OG, INF 205, vor dem Dekanat.)

Homepage:
https://sip.math.uni-heidelberg.de/vl/st1-ss19/