Statistik 1
Prof. Dr. Jan Johannes
Sergio Brenner Miguel
Sommersemester 2019

UNIVERSITÄT HEIDELBERG
ZUKUNFT
SEIT 1386

05. Übungsblatt

Aufgabe 1	Aufgabe 2	Aufgabe 3	Aufgabe 4	Σ

Aufgabe 1 (4 Punkte)

Eine Krankheit kommt bei circa 0.1% der Bevölkerung vor. Mittels eines Tests zur Erkennung der Krankheit wird eine Person als *krank* bzw. *gesund* klassifiziert. Dieser führt bei 97% der Kranken, aber auch bei 2% der Gesunden zu einer Klassifizierung als *krank*. Mit $\nu_0 \geq 0$ (bzw. $\nu_1 \geq 0$) werde der Verlust bei der falschen Klassifizierung *krank* (bzw. *gesund*) eines gesunden (bzw. kranken) Patienten bewertet.
Formulieren Sie dies als Bayessches Entscheidungsproblem und geben Sie eine Bayes-optimale Entscheidungsregel in Abhängigkeit von ν_0 und ν_1 an.

Aufgabe 2 (4 Punkte)

Es seien die Annahmen und Notationen der Definition 09.06 erfüllt. Zeigen Sie: Im statistischen Entscheidungsproblem $(\mathcal{E}, \mathscr{E}, \nu)$ gelten für jede Enscheidungsregel $\delta_0 \in \Delta$ die folgende Aussagen:

a) Ist δ_0 minimax-optimal und eindeutig (in Δ) in dem Sinne, dass jede andere Minimax-Regel die gleiche Risikofunktion besitzt, so ist δ_0 zulässig in Δ.

b) Ist δ_0 zulässig mit konstanter Risikofunktion, so ist δ_0 minimax-optimal.

c) Ist δ_0 eine Bayesregel (bzgl $\mathbb{P}^{\boldsymbol{\vartheta}}$) und eindeutig (in Δ) in dem Sinne, dass jede andere Bayesregel (bzgl. $\mathbb{P}^{\boldsymbol{\vartheta}}$) die gleiche Risikofunktion besitzt, so ist δ_0 zulässig (in Δ).

d) Die Parametermenge Θ bilde einen metrischen Raum versehen mit der Borel-σ-Algebra $\mathscr{B}_\Theta$. Ist δ_0 eine Bayesregel (bzgl. $\mathbb{P}^{\boldsymbol{\vartheta}}$ in Δ), so ist δ_0 zulässig (in Δ), falls

   i) $\mathcal{R}_\nu^{\boldsymbol{\vartheta}}(\delta_0) < \infty$;

   ii) für jede nichtleere offene Menge U in Θ gilt $\mathbb{P}^{\vartheta}[U] > 0$;

iii) für jede Entscheidungsregel $\delta(\in \Delta)$ mit $\mathcal{R}_\nu^{\vartheta}(\delta) \leq \mathcal{R}_\nu^{\vartheta}(\delta_0)$ ist die Abbildung $\theta \mapsto \mathcal{R}_\nu(\theta, \delta)$ stetig.

Hinweis: Bei allen Aufgabenteilen ist es ratsam, zunächst anzunehmen, dass δ_0 nicht zulässig wäre.

Aufgabe 3 (4 Punkte)

Für ein $d \in \mathbb{N}$ sei $Y \odot \mathrm{N}^n_{(\mathbb{R}^d \times \{E_d\})} = (\mathrm{N}^n_{(\mu, E_d)})_{\mu \in \mathbb{R}^d}$.

a) Nehmen Sie eine $N_{(0,\sigma^2 \mathrm{E}_d)}$-Verteilung für die a-priori Verteilung von μ an und bestimmen Sie den Bayesoptimalen Schätzer $\widehat{\mu}$ für den Parameter μ gegeben der Beobachtung Y.
Hinweis: Verwenden Sie geschickt das Ergebnis der Aufgabe 2 des Übungszettels 4.

b) Bestimmen Sie das quadratische Risiko von $\bar{Y} := \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n Y_i$ und das quadratische Risiko von $\widehat{\mu}$.
Hinweis: Verwenden Sie die Aufgabe 2 c) des Übungszettels 3.

c) Zeigen Sie mittels a) und b), dass bezüglich der quadratischen Verlustfunktion $\nu(\mu, e) = \|\mu - e\|^2$ das arithmetische Mittel $\bar{Y} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n Y_i$ ein minimax-optimaler Schätzer für μ ist.

Aufgabe 4 (4 Punkte)

Beweisen Sie das Stein-bzw. Chen-Stein-Lemma:

a) Eine reellwertige Zufallsvariable X ist $\mathrm{N}_{\mu,\sigma^2}$-verteilt genau dann, wenn $\mathbb{E}[(X-\mu)f(X)] = \sigma^2\,\mathbb{E}[f'(X)]$ für alle $f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R})$ mit $\mathbb{E}[|f'(X)|] < \infty$ gilt. Die Hinrichtung wurde bereits in der Vorlesung gezeigt.

i) Zeigen Sie, dass aus $\mathbb{E}[Zf(Z)] = \mathbb{E}[f'(Z)]$ für alle $f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R})$ mit $\mathbb{E}[|f'(Z)|] < \infty$ folgt bereits für $n \in \mathbb{N}$

$$\mu_n = \mathbb{E}[Z^n] = \begin{cases} 0 & \text{, für } n \text{ ungerade;} \\ (n-1)!! = (n-1)(n-3)\cdots 3 \cdot 1 & \text{, für } n \text{ gerade .} \end{cases}$$

Hinweis: Vergessen Sie nicht die Integrabilität zu überprüfen.

ii) Zeigen Sie, dass $\limsup_{n\to\infty} \frac{1}{n}(\mathbb{E}[|Z|^n])^{1/n} =: \alpha < \infty$.
Anmerkung: Hieraus folgt bereits, unter Verwendung des Korollar 15.32 (Momentenproblem) des Buches *Wahrscheinlickeitstheorie, Achim Klenke*, dass die Momente (μ_k) die Verteilung eindeutig charakterisieren. Da (μ_k) insbesondere die Momente der Standardnormalverteilung sind, folgt, dass Z standardnormalverteilt sein muss.

b) Eine Zufallsvariable N mit Werten in $\mathbb{N}_0$ ist Poi_λ-verteilt genau dann, wenn $\mathbb{E}[Nf(N)] = \lambda\,\mathbb{E}[f(N+1)]$ für jedes beschränkte $f : \mathbb{N}_0 \to \mathbb{R}$ gilt.

Abgabe:
In Zweiergruppen, bis spätestens Dienstag, den **27. Mai 2019, 11:15 Uhr**.
(Die Übungszettelkästen sind im 1. OG, INF 205, vor dem Dekanat.)

Homepage:
`https://sip.math.uni-heidelberg.de/vl/st1-ss19/`