Statistik 1
Prof. Dr. Jan Johannes
Sergio Brenner Miguel
Sommersemester 2019

UNIVERSITÄT HEIDELBERG
ZUKUNFT SEIT 1386

04. Übungsblatt

Aufgabe 1	Aufgabe 2	Aufgabe 3	Aufgabe 4	Σ

Aufgabe 1 (4 Punkte)

Sei $(\mathcal{X}, \mathscr{X}, \mathbb{P}_\Theta)$ mit $\Theta \subset \mathbb{R}^d$, $(\Theta, \mathscr{T})$ messbarer Raum, ein statistisches Experiment mit a-priori Verteilung $\vartheta \sim \mathbb{P}^{\boldsymbol{\vartheta}}$, wobei $\mathbb{E}^{\boldsymbol{\vartheta}}[(\bullet)^2] < \infty$ und $\Delta = \bigcap_{\theta \in \Theta} \mathscr{L}_2(\mathbb{P}_\theta^X)$. Zeigen Sie die folgenden Aussagen

a) Für die quadratische Verlustfunktion $\nu(\theta, e) = \|\theta - e\|^2$ ist eine Festlegung des bedingten Erwartungsweres $\widehat{\theta} := \mathbb{E}^{\boldsymbol{\vartheta}|X}[\boldsymbol{\vartheta}]$, falls Sie existiert, ein Δ-Bayes-optimaler Schätzer von θ bezüglich der a-priori Verteilung $\mathbb{P}^{\boldsymbol{\vartheta}}$ und jeder weitere Bayesregel δ unterscheidet sich nur auf einer $\mathbb{P}^X$-Nullmenge von $\widehat{\theta}$.

b) Sei δ eine Bayesregel bezüglich $\mathbb{P}^{\boldsymbol{\vartheta}}$ zur quadratischen Verlustfunktion $\nu(\theta, e) = \|e - \theta\|^2$ und $\widehat{\theta} := \mathbb{E}^{\boldsymbol{\vartheta}|X}[\boldsymbol{\vartheta}]$ existiert. Ist δ erwartungstreu dann muss bereits $\mathcal{R}_\nu^{\vartheta}(\delta) = 0$ gelten.

Aufgabe 2 (4 Punkte)

Wir betrachten erneut den Ridge-Schätzer $\widehat{\beta}_{\text{Ridge}}(\lambda)$ in einem gewöhnlichen normalen linearen Modell $Y \sim \mathrm{N}_{X\beta, \sigma^2 \mathrm{Id}_n}, \beta \in \mathbb{R}^p, \sigma > 0$ für ein $\lambda > 0$ und $\varepsilon := Y - X\beta$. Zeigen Sie, dass $\widehat{\beta}_{\text{Ridge}}(\lambda)$ ein Bayes-optimaler Schätzer bzgl der quadratischen Verlustfunktion und der a-priori Verteilung $\beta \sim \mathrm{N}^p_{0,\rho^2}$, β und ε unabhängig, mit geeigneter a-priori Varianz $\rho^2 = \rho^2(\lambda, \sigma) \geq 0$ ist.
Hinweis: Verwenden Sie, ohne Beweis, die Woodbury-Matrix Identität für Matrizen $A \in \mathbb{R}^{(n,n)}, U \in \mathbb{R}^{(n,p)}, C \in \mathbb{R}^{(p,p)}, V \in \mathbb{R}^{(p,n)}$, *$A, C$ invertierbar:*

$$(A + UCV)^{-1} = A^{-1} - A^{-1}U\left(C^{-1} + VA^{-1}U\right)^{-1} VA^{-1}.$$

Aufgabe 3 (4 Punkte)

Die Lebesgue-Dichte einer Beta-Verteilung $\mathrm{Beta}_{a,b}$ auf $[0,1]$ ist gegeben durch

$$\mathbb{f}_{a,b}(x) := \frac{1}{B(a,b)} x^{a-1}(1-x)^{b-1}, \quad x \in (0,1),$$

wobei $a, b > 0$ und $B(a,b) = \int_0^1 x^{a-1}(1-x)^{b-1}dx = \frac{\Gamma(a)\Gamma(b)}{\Gamma(a+b)}$ die Beta-Funktion und Γ die Gamma-Funktion bezeichnet. $\mathrm{Beta}_{a,b}$ hat Erwartungswert $\mu_{a,b} = \frac{a}{a+b}$ und Varianz $\sigma^2_{a,b} = \frac{ab}{(a+b)^2(a+b+1)}$.

a) Es sei $X \sim \mathrm{Bin}(n,\pi), \pi \in (0,1)$ mit $n \geq 1$. Betrachte $\mathrm{Beta}_{a,b}$ als a-priori Verteilung für den Parameter π. Zeigen Sie, dass die a-posteriori Dichte bei Vorliegen einer Beobachtung $X = x$ zur Beta-Verteilung $\mathrm{Beta}(a+x, b+n-x)$ gehört.

b) Schließen Sie, dass der Bayesschätzer bezüglich einer quadratischen Verlustfunktion gegeben ist durch $\widehat{\pi}_{a,b} = \frac{a+X}{a+b+n}$. Bestimmen Sie sein quadratisches Risiko als Funktion von π und sein zugehöriges Bayesrisiko.

Aufgabe 4 (4 Punkte)

Wenn man in der Bayesformel die Dichte $\mathbb{f}^{\vartheta}$ durch eine nichtnegative, messbare Funktion ersetzt und $\mathbb{f}^{\vartheta|X=x}(\theta)$ weiterhin wohldefiniert ist, so ergibt sich aus dem Erwartungswert der a-posteriori Verteilung ein verallgemeinerter Bayesschätzer für die quadratische Verlustfunktion. Gegeben Sei $X_1, \dots, X_n \overset{iid}{\sim} \mathrm{N}_{\mu,\mathrm{Id}_d}, \mu \in \mathbb{R}^d$.

a) Betrachten Sie das Lebesguemaß als verallgemeinerte a-priori Verteilung. Zeigen Sie, dass $\bar{X} := \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n X_i$ ein verallgemeinerter Bayesschätzer von μ bzgl. der quadratisch Verlustfunktion $\nu(\mu, e) = \|\mu - e\|^2$ ist.

b) Betrachten Sie für $d = 1$ die Funktion $\mathbb{f}^{\vartheta}(\theta) = \mathbb{1}_{(a,b)}(\theta)$ mit $a, b \in \mathbb{R} \cup \{-\infty, \infty\}$. Berechnen Sie den verallgemeinerter Bayesschätzer $\widehat{\mu}_{a,b}$ von μ bzgl. der quadratischen Verlustfunktion $\nu(\mu, e) = (\mu - e)^2$.

Abgabe:
In Zweiergruppen, bis spätestens Dienstag, den **20. Mai 2019, 11:15 Uhr**.
(Die Übungszettelkästen sind im 1. OG, INF 205, vor dem Dekanat.)

Homepage:
https://sip.math.uni-heidelberg.de/vl/st1-ss19/