Statistik 1
Prof. Dr. Jan Johannes
Sergio Brenner Miguel
Sommersemester 2019

UNIVERSITÄT HEIDELBERG
ZUKUNFT SEIT 1386

01. Übungsblatt

Aufgabe 1	Aufgabe 2	Aufgabe 3	Aufgabe 4	Σ

Aufgabe 1 (3 Punkte)

Sei $L \subseteq \mathbb{R}^n$ ein m-dimensionaler Untervektorraum mit Basis $x_1, \ldots, x_m, m \leq n$. Dann gilt bekanntermaßen, dass $L = \{Xv : v \in \mathbb{R}^m\}$ mit $X = (x_1 \ldots x_m)$. Sei $P = X(X^tX)^{-1}X^t$. Zeigen Sie:

a) Für alle $v \in \mathbb{R}^n$ gilt: $Pv \in L$;

b) für alle $v \in \mathbb{R}^n$ gilt: $PPv = Pv$;

c) für alle $v \in \mathbb{R}^n$ gilt: $\langle Pv - v, Pv \rangle = 0$.

Anmerkung: Mithilfe der Matrix P kann die orthogonale Projektion Π_L geschrieben werden als $\Pi_L(v) = Pv$ für $v \in \mathbb{R}^n$. Wir erhalten mit $(\mathrm{Id}_n - \Pi_L)v = \Pi_{L^\perp}(v)$ eine alternative Schreibweise der Projektion auf den Untervektorraum $L^\perp$, da mit obrigen Betrachtungen für alle $v \in \mathbb{R}^n$ gilt $v = \Pi_L(v) + \Pi_{L^\perp}(v)$, $\Pi_L(v) \in L$ und $\langle \Pi_L v, \Pi_{L^\perp} v \rangle = 0$.

Aufgabe 2 (5 Punkte)

Sei $X = (X_1, \ldots, X_n)^t \sim \mathrm{N}_{\mu,\Sigma}$ mit $\mu \in \mathbb{R}^n$ and $\Sigma \in \mathbb{R}^{(n,n)}$. Zeigen oder widerlegen Sie die folgenden Aussagen:

a) Für alle $i \in [\![1, n]\!]$ ist X_i $\mathrm{N}_{\mu_i,\Sigma_{ii}}$-verteilt. Sei umgekehrt $X_i \sim \mathrm{N}_{\mu_i,\Sigma_{ii}}$ für alle $i \in [\![1, n]\!]$, wobei $\mu_i \in \mathbb{R}$ und $\Sigma_{ii} > 0$. Dann besitzt $(X_1, \ldots, X_n)^t$ eine multivariate Normalverteilung.

b) Für $A \in \mathbb{R}^{(p,q)}$ und $b \in \mathbb{R}^q$ gilt $Y = AX + b \sim \mathrm{N}_{A\mu+b,A\Sigma A^t}$.

c) Seien $i, j \in [\![1, n]\!]$. Dann sind X_i und X_j genau dann unabhängig, wenn $\Sigma_{i,j} = 0$.

d) Ist Σ strikt positiv-definit, dann besitzt X die Lebesgue-Dichte

$$\mathbb{f}(x) = \frac{1}{(2\pi)^{n/2}(\det(\Sigma))^{1/2}} \exp\left(-\frac{1}{2}(x-\mu)^t\Sigma^{-1}(x-\mu)\right), \qquad x \in \mathbb{R}^n.$$

Aufgabe 3 (5 Punkte)

Sei $X \sim \mathrm{N}_{\mu,\sigma^2 \mathrm{Id}_n}$ wobei $\mu = (\mu_1, \dots, \mu_n)^t \in \mathbb{R}^n$ und $\sigma^2 > 0$ und $Z \sim \mathrm{N}^n_{0,1}$.

a) Sei $U \subset \mathbb{R}^n$ ein Untervektorraum und $U^\perp$ sein orthogonales Komplement. Zeigen Sie, dass $\Pi_U(Z)$ und $\Pi_{U^\perp}(Z)$ stochastisch unabhängig sind.

b) Sei $U \subset \mathbb{R}^n$ ein Untervektorraum und $U^\perp$ sein orthogonales Komplement. Zeigen Sie, dass $\Pi_U(X)$ und $\Pi_{U^\perp}(X)$ stochastisch unabhängig sind.

c) Sei $L = \{(\lambda, \dots, \lambda)^t \in \mathbb{R}^n : \lambda \in \mathbb{R}\}$. Geben Sie explizit die Verteilung von $\Pi_L(X)$ an.

d) Benutzen Sie Aufgabenteile b)-c) um zu zeigen, dass $\widehat{\mu} = n^{-1} \sum_{i=1}^n X_i$ und $\widehat{\sigma^2} = n^{-1} \sum_{i=1}^n (X_i - \widehat{\mu})^2$ stochastisch unabhängig sind.

e) Betrachten Sie die Zufallsvariablen $Y \sim \mathrm{N}^n_{\mu,\sigma^2}$ mit $\mu \in \mathbb{R}$ und $\sigma^2 > 0$. Definieren Sie $\tilde{\mu} := n^{-1} \sum_{i=1}^n Y_i$ und $\tilde{\sigma}^2 := (n-1)^{-1} \sum_{i=1}^n (Y_i - \tilde{\mu})^2$. Bestimmen Sie die Verteilung von $\frac{\sqrt{n}(\tilde{\mu}-\mu)}{\sqrt{\tilde{\sigma}^2}}$.

Aufgabe 4 (3 Punkte)

Es sei $Z \sim \mathrm{N}^q_{0,1}$ und $\delta \in \mathbb{R}$. Dann ist $(Z_1 + \delta)^2 + \sum_{i=2}^q Z_i^2 \sim \chi^2_q(\delta^2)$ nichtzentral χ^2-verteilt mit q Freiheitsgraden und Nichtzentralitätsparameter δ^2. Zeigen Sie die folgenden Aussagen

a) Ist $Z \sim \mathrm{N}_{\mu,\mathrm{Id}_q}$ mit $\mu \in \mathbb{R}^q$, so gilt $\|Z\|^2 \sim \chi^2_q(\|\mu\|^2)$.

b) Ist $W \sim \chi^2_q(\delta^2)$, so gilt $\mathbb{E}[W] = \delta^2 + q$.

Abgabe:
In Zweiergruppen, bis spätestens Montag, den **29. April 2019, 11:15 Uhr**.
(Die Übungszettelkästen sind im 1. OG, INF 205, vor dem Dekanat.)

Homepage:
https://sip.math.uni-heidelberg.de/vl/st1-ss19/