Statistik 1
Prof. Dr. Jan Johannes
Sergio Brenner Miguel
Sommersemester 2019

UNIVERSITÄT HEIDELBERG
ZUKUNFT SEIT 1386

00. Übungsblatt

Anmerkung: Dieser Übungszettel ist nicht abzugeben. Er wird im ersten Tutorium besprochen und dient der Auffrischung und Vertiefung von Konzepten aus vergangenen Vorlesungen.

Aufgabe 1 (0 Punkte)

Sei X eine Zufallsvariable mit Werten in $\mathbb{N}$. Dann gilt die folgende alternative Formel für den Erwartungswert, falls dieser exisitiert

$$\mathbb{E}[X] = \sum_{j=1}^{\infty} \mathbb{P}[X \geq j].$$

Sei $Y \sim \text{Geo}_p, p \in (0,1)$, d.h. für $n \in \mathbb{N}$ gilt $\mathbb{P}[Y = n] = p(1-p)^{n-1}$.

a) Bestimmen Sie explizit den Wert von $\mathbb{P}[Y \geq j]$ für $j \in \mathbb{N}$ und berechnen Sie damit den Erwartungswert $\mathbb{E}[Y]$.

b) Bestimmen Sie nun den bedingten Erwartungswert $\mathbb{E}[Y|Y \geq j]$ für ein beliebiges $j \in \mathbb{N}$.

Aufgabe 2 (0 Punkte)

Die Dichte einer χ^2_k-verteilten Zufallsvariable ist gegeben durch

$$\mathbb{f}_k(x) = \frac{1}{2^{k/2}\Gamma(k/2)} x^{\frac{k}{2}-1} \exp(-x/2) \mathbb{1}_{(0,\infty)}(x), \qquad x \in \mathbb{R}\,.$$

Hierbei ist $\Gamma(z) := \int_0^\infty t^{z-1} \exp(-t)dt, z > 0$, die Gamma-Funktion.

a) Sei $X \sim \mathrm{N}_{0,1}$. Zeigen Sie, dass $Z = X^2$ die Dichte $\mathbb{f}_1$ besitzt.

b) Sei $X \sim \chi^2_k$, $Y \sim \chi^2_\ell$ für $k, \ell \in \mathbb{N}$ und X und Y unabhängig. Zeigen Sie, dass $X + Y \sim \chi^2_{k+\ell}$.

c) Sei $X_1, X_2 \overset{uiv}{\sim} \mathrm{N}_{0,1}$. Geben Sie die Wahrscheinlichkeitsdichte von $V = X_1^2 + X_2^2$ an. Zu welcher bekannten Verteilungsfamilie gehört diese noch?

Aufgabe 3 (0 Punkte)

Sei $X_0, \ldots, X_n$ unabhängig und identisch $\mathrm{Bin}_{1,1/2}$-verteilte Zufallsvariablen und sei weiter τ eine Zufallsvariable mit $\tau \sim \mathrm{Bin}_{n,1/2}$ mit Zähldichte

$$\mathbb{P}[\tau = k] = \binom{n}{k} 0.5^k (1-0.5)^{n-k}, \qquad k \in [\![0, n]\!]$$

wobei τ stochastisch unabhängig zu den (X_i) sei. Wir definieren die zufällig gestoppte Summe $S_\tau := \sum_{i=0}^{\tau} X_i$ und die Summe $S_n = \sum_{i=0}^{n} X_i$.

a) Bestimmen Sie $\mathbb{E}[S_n | X_0]$

b) Bestimmen Sie $\mathbb{E}[X_0 | S_n]$. Gegen welchen Wert konvergiert $\mathbb{E}[X_0 | S_n]$ in Wahrscheinlichkeit ?

c) Bestimmen Sie $\mathbb{E}[S_\tau | \tau]$.

d) Bestimmen Sie $\mathbb{E}[S_\tau | X_0]$.

e) Bestimmen Sie jeweils mit Hilfe von c) oder d) $\mathbb{E}[S_\tau]$.

Aufgabe 4 (0 Punkte)

Es seien X und Y reellwertige Zufallsvariablen mit $\mathbb{E}[|Y|] < \infty$ und gemeinsamer Lebesgue-Dichte $\mathbb{f}^{X,Y}$. Als bedingte Dichte von Y gegeben $X = x$ definiert man

$$\mathbb{f}^{Y|X=x}(y) := \frac{\mathbb{f}^{X,Y}(x,y)}{\int_{\mathbb{R}} \mathbb{f}^{X,Y}(x,z)dz}, \qquad y \in \mathbb{R}.$$

a) Zeigen Sie, dass $\mathbb{f}^{Y|X=x}(y)$ für $\mathbb{P}^X$-fast alle x wohl definiert ist.

b) Betrachten Sie die Funktion $g(x) := \int_{\mathbb{R}} y \, \mathbb{f}^{Y|X=x}(y)dy$, falls die rechte Seite wohldefiniert ist, und $g(x) := 0$ andernfalls. Weisen Sie nach, dass $g(X)$ eine Version der bedingten Erwartung $\mathbb{E}[Y|X]$ ist.

c) Nehmen Sie an, dass X und Y gemeinsam normalverteilt sind mit Erwartungswert $\mu \in \mathbb{R}^2$ und Kovarianzmatrix $\Sigma \in \mathbb{R}^{(2,2)}$, wobei Σ strikt positiv definit. Bestimmen Sie $\mathbb{E}[Y|X]$.

d) Sei $\mathbb{E}[|X|] < \infty$, berechnen Sie die bedingte Erwartung von $\mathbb{E}[X||X|]$

Aufgabe 5 (0 Punkte)

Es seien X und Y reellwertige Zufallsvariablen mit $\mathbb{E}[|Y|] < \infty$, gemeinsamer Lebesgue-Dichte $\mathbb{f}^{X,Y}$ und bedingter Dichte $\mathbb{f}^{Y|X=x}$ von Y gegeben $X = x$ wie in Aufgabe 4. $m(x)$

ist ein bedingter Median von Y gegeben $X = x$, sofern (falls wohldefiniert)

$$\int_{-\infty}^{m(x)} f_{Y|X=x}(y)dy = 1/2$$

gilt. Zeigen Sie, dass m die Minimalitätseigenschaft

$$\mathbb{E}[|Y - m(X)|] = \inf_h \mathbb{E}[|Y - h(X)|]$$

besitzt, wobei sich das Infimum über alle Borel-messbaren $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ erstreckt. Welches Kriterium minimieren die entsprechend definierten bedingten α-Quantile, $\alpha \in (0, 1)$?

Hinweis: Jeder Wert $m \in \mathbb{R}$ mit $\mathbb{P}[Z \leq m] \geq 1/2$ und $\mathbb{P}[Z \geq m] \leq 1/2$ heißt Median der reellwertigen Zufallsvariable Z. Zeigen und benutzen Sie, dass für $c > m$ gilt
$\mathbb{E}[|Z - c|] - \mathbb{E}[|Z - m|] = (c - m)(\mathbb{P}[Z \leq m] - \mathbb{P}[Z > m]) + 2\,\mathbb{E}[(c - Z)\mathbb{1}_{\{m<Z<c\}}]$.

Abgabe:
Der 0.te Übungszettel ist nicht abzugeben.

Homepage:
https://sip.math.uni-heidelberg.de/vl/st1-ss19/