Einführung in die Wahrscheinlichkeitstheorie und Statistik
Prof. Dr. Jan Johannes
Sandra Schluttenhofer
Wintersemester 2018/19

UNIVERSITÄT HEIDELBERG
ZUKUNFT SEIT 1386

9. Übungsblatt

Aufgabe 33 (Unkorreliertheit und Unabhängigkeit, 4 = 1 + 2 + 1 Punkte).

Seien (X, Y) die Koordinaten eines Punktes, der zufällig aus $E = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 1\}$ ausgewählt wird, d.h. der Zufallsvektor (X, Y) habe die Dichte

$$f^{X,Y}(x, y) = \frac{1}{\pi} \cdot \mathbb{1}_{\{(x,y)\in E\}}, \qquad (x, y) \in \mathbb{R}^2.$$

(a) Berechnen Sie die Marginalverteilungen von X und Y.

(b) Berechnen Sie $\mathbb{V}\mathrm{ar}(X), \mathbb{V}\mathrm{ar}(Y)$ sowie $\mathbb{C}\mathrm{ov}(X, Y)$ und die Korrelation $\rho(X, Y)$.
Hinweis: *Verwenden Sie für die Berechnungen die Transformationsformel und Polarkoordinaten $(x, y) = (\cos(\phi), \sin(\phi))$ bzw. $x = \sin(\phi)$ für die 2- bzw. 1-dimensionalen Integrale.*

(c) Zeigen Sie, dass X und Y nicht unabhängig sind, obwohl sie unkorreliert sind.

Aufgabe 34 (Unkorreliertheit und Unabhängigkeit, 4 = 2 + 1 + 1 Punkte).

In dieser Aufgabe wollen wir zeigen, dass es zwingend notwendig ist, dass zwei Zufallsvariablen X_1, X_2 **gemeinsam** normalverteilt sind, damit aus $\mathbb{C}\mathrm{ov}(X_1, X_2) = 0$ auf die Unabhängigkeit von X_1, X_2 geschlossen werden kann (vgl. Beispiel 24.14 aus dem Skript).
Sei dazu $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ ein Wahrscheinlichkeitsraum. Es sei $Y \sim N_{(0,1)}$ standardnormalverteilt und $V_p \sim \mathrm{Bin}_{(1,p)}$ eine von Y unabhängige, bernoulliverteilte Zufallsvariable mit $p \in (0, 1)$. Definiere $Z_p := (-1)^{V_p} \cdot Y$.

(a) Zeigen Sie: $Z_p \sim N_{(0,1)}$ für alle $p \in (0, 1)$.
Hinweis: *Berechnen Sie die Verteilungsfunktion von Z_p, indem Sie den "Trick" $\mathbb{P}(A) = \mathbb{P}(A \cap \{V_p = 0\}) + \mathbb{P}(A \cap \{V_p = 1\})$ benutzen.*

(b) Zeigen Sie: Für alle $p \in (0, 1)$ sind Y, Z_p nicht unabhängig.
Hinweis: *Betrachten Sie die Ereignisse $\{Y < -1, Z_p < -1\}$ und $\{Y < -1, Z_p > 1\}$.*

(c) Finden Sie $p \in (0, 1)$, so dass Y, Z_p unkorreliert sind, d.h. $\mathbb{C}\mathrm{ov}(Y, Z_p) = 0$.

Aufgabe 35 (Gleichmäßig beste unverfälschte Tests und Konfidenzbereiche, 8 =1 + 1 + 2 + 1 + 2 + 1 Punkte).

Wir untersuchen eine Maschine, die Schrauben herstellt. Uns ist bekannt (und das zweifeln wir nicht an), dass die Länge der Schrauben im Mittel $\mu = 5$ beträgt (Angabe in cm). Der Hersteller behauptet, dass die Standardabweichung der Länge der Schrauben höchstens $\sigma_0 = 0.3$ cm beträgt. Wir vermuten jedoch, dass die Standardabweichung tatsächlich größer ist. Für eine statistische Untersuchung nehmen wir an, dass die Länge der Schrauben normalverteilt ist mit Mittelwert μ und Standardabweichung σ. Für $n = 10$ Schrauben beobachten wir folgende Längen (in cm):

5.6	5.2	4.1	3.7	6.5	3.6	6.0	6.1	5.2	4.2

(a) Sei $n \in \mathbb{N}$ und seien $X_1, ..., X_n \overset{\text{iid}}{\sim} N_{(\mu,\sigma^2)}$ mit $\sigma > 0$. Nutzen Sie das Neyman-Pearson-Lemma 12.13, um einen besten Test $\phi^* : \mathbb{R}^n \to \{0, 1\}$ für die einfachen Hypothesen

$$H_0 : \sigma = \sigma_0 \quad \text{gegen} \quad H_1 : \sigma = \sigma_1$$

mit $\sigma_1 > \sigma_0$ zum Niveau $\alpha \in (0, 1)$ anzugeben.
Hinweis: *Bestimmen Sie zunächst die Dichte f_σ der gemeinsamen Verteilung $\mathbb{P}_\sigma = \mathbb{P}^{X_1,...,X_n}$ von $X_1, ..., X_n$.*

(b) Zeigen Sie mittels der Technik des monotonen Likelihood-Quotienten, dass ϕ^* die Form

$$\phi^*(x) = \begin{cases} 1, & T(x) > c^{**}, \\ 0, & T(x) \leq c^{**} \end{cases}$$

besitzt, wobei $T(x) = \sum_{i=1}^n (x_i - \mu)^2$. Folgern Sie, dass ϕ^* ein gleichmäßig bester Test ist für das Testproblem

$$H_0 : \sigma = \sigma_0 \quad \text{gegen} \quad H_1' : \sigma > \sigma_0.$$

(c) Zeigen Sie, dass ϕ^* sogar ein gleichmäßig bester Test ist für das Testproblem

$$H_0' : \sigma \leq \sigma_0 \quad \text{gegen} \quad H_1' : \sigma > \sigma_0.$$

Ist ϕ^* auch ein unverfälschter Test?
Hinweis: *Definieren Sie $Z_n := \frac{1}{\sigma^2} \sum_{i=1}^n (X_i - \mu)^2$. Überlegen Sie sich, dass die Verteilung von Z_n nicht mehr von σ abhängt. Zeigen Sie dann, dass $\mathbb{P}_\sigma(\phi^* = 1) \leq \alpha$ gilt für $\sigma \leq \sigma_0$.*

(d) Es ist bekannt, dass $Z_n \sim \chi_n^2$ (vgl. Beispiel 17.12), wobei χ_n^2 die Chi-Quadrat-Verteilung mit n Freiheitsgraden bezeichnet. Es bezeichne $\chi_{n,1-\alpha}^2$ das $(1 - \alpha)$-Quantil dieser Verteilung. Zeigen Sie, dass $c^{**} = \sigma_0^2 \cdot \chi_{n,1-\alpha}^2$ gilt.

(e) Wir drücken nun die Abhängigkeit des Tests ϕ^* von σ_0 explizit aus, indem wir ihn mit $\phi_{\sigma_0}^*$ bezeichnen. Bestimmen Sie den Annahmebereich $\{x \in \mathbb{R}^n : \phi_{\sigma_0}^*(x) = 0\}$ des Tests und damit ein gleichmäßig bestes $(1 - \alpha)$-Konfidenzintervall B für σ mittels Satz 12.33. Für welche falschen Parameter wurde dieses Intervall konstruiert? Ist das Konfidenzintervall unverfälscht?

(f) Sei nun $\alpha = 0.05$. Werden Sie dem Hersteller der Maschine auf Basis unserer Beobachtungen und des Tests ϕ^* aus (b) vorwerfen, dass die Angabe der Standardabweichung falsch ist? Geben Sie auf Basis unserer Beobachtungen das 95%-Konfidenzintervall für σ aus (e) an.
Hinweis: *Hier sind einige Quantile der χ_n^2-Verteilung: $\chi_{10,0.05}^2 = 3.94$, $\chi_{10,0.95}^2 = 18.31$.*

Abgabe:
In Zweiergruppen, bis spätestens Donnerstag, den **20. Dezember 2018, 11:15 Uhr**.
(Die Übungszettelkästen sind im 1. OG, INF 205, vor dem Dekanat.)

Homepage der Vorlesung:
`https://sip.math.uni-heidelberg.de/vl/ews-ws18/`