Einführung in die
Wahrscheinlichkeitstheorie und Statistik
Prof. Dr. Jan Johannes
Sandra Schluttenhofer
Wintersemester 2018/19

UNIVERSITÄT HEIDELBERG
ZUKUNFT
SEIT 1386

8. Übungsblatt

Aufgabe 29 (Satz von der konvergenten Reihe, 4 = 1.5 + 1 + 1.5 Punkte).
Beweisen Sie den **Satz von der konvergenten Reihe**: Sei $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ ein Wahrscheinlichkeitsraum. Sei $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge von Zufallsvariablen aus $\mathscr{L}_1(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ mit $\sum_{n\in\mathbb{N}} \mathbb{E}\left(|X_n|\right) < \infty$. Dann gilt:

(i) $\mathbb{P}\left(\sum_{n\in\mathbb{N}} |X_n| < \infty\right) = 1$

(ii) $\sum_{n\in\mathbb{N}} X_n \in \mathscr{L}_1$

(iii) $\mathbb{E}\left(\sum_{n\in\mathbb{N}} X_n\right) = \sum_{n\in\mathbb{N}} \mathbb{E}(X_n)$

Aufgabe 30 (Alternative Formeln für den Erwartungswert, 4 = 2 + 1 + 1 Punkte).

(a) Sei $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ ein Wahrscheinlichkeitsraum und sei $X \in \overline{\mathcal{A}}^+$ eine Zufallsvariable. Zeigen Sie, dass dann gilt:

$$\mathbb{E}(X) = \int_0^\infty \mathbb{P}(X > y)\, \mathrm{d}y$$

Hinweis: *Schreiben Sie $\mathbb{P}(X > y)$ als Integral und verwenden Sie den Satz von Fubini.*

(b) Berechnen Sie mittels der Formel aus (a) den Erwartungswert einer exponentialverteilten Zufallsvariable $X \sim \mathrm{Exp}_\lambda$ mit Parameter $\lambda > 0$.

(c) Sei $X : \Omega \longrightarrow \mathbb{N} = \{1, 2, 3, ...\}$ eine diskrete Zufallsvariable. Die Formel für den Erwartungswert aus (a) wird dann zu

$$\mathbb{E}X = \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{P}(X \geq n).$$

Berechnen Sie unter Verwendung dieser Formel den Erwartungswert im Falle, dass $X \sim \mathrm{Geo}_p$ eine geometrisch verteilte Zufallsvariable mit Parameter $p \in (0, 1)$ ist.

Aufgabe 31 (Eigenschaften der (Ko-)Varianz, 4 = 1 + 2 + 1 Punkte).
Beweisen Sie Lemma 24.03 aus der Vorlesung:
Seien $X, Y, Z \in \mathscr{L}_2$ und $a, b \in \mathbb{R}$.

(a) Es gilt $\mathbb{V}\mathrm{ar}(X) = 0$ genau dann, wenn $\mathbb{P}(X = \mathbb{E}(X)) = 1$.

(b) $\mathbb{C}\mathrm{ov} : \mathscr{L}_2 \times \mathscr{L}_2 \longrightarrow \mathbb{R}^+$ ist eine positiv semi-definite, symmetrische Bilinearform, d.h.

- **(symmetrisch)** $\mathbb{C}\mathrm{ov}(X, Y) = \mathbb{C}\mathrm{ov}(Y, X)$

- (**linear**) $\mathbb{C}\mathrm{ov}(aX + bY, Z) = a\mathbb{C}\mathrm{ov}(X, Z) + b\mathbb{C}\mathrm{ov}(Y, Z)$
- (**positiv semi-definit**) $\mathbb{C}\mathrm{ov}(X, X) \geq 0$.

und es gilt $\mathbb{C}\mathrm{ov}(a, X) = 0$.

(c) $\mathbb{V}\mathrm{ar} : \mathscr{L}_2 \longrightarrow \mathbb{R}^+$ ist die von $\mathbb{C}\mathrm{ov}$ induzierte quadratische Form, sodass

- $\mathbb{V}\mathrm{ar}(aX + b) = a^2\mathbb{V}\mathrm{ar}(X)$
- $\mathbb{V}\mathrm{ar}(X + Y) = \mathbb{V}\mathrm{ar}(X) + \mathbb{V}\mathrm{ar}(Y) + 2\mathbb{C}\mathrm{ov}(X, Y)$

gelten.

Aufgabe 32 (Enten, Jäger und die Tschebycheff Ungl., 4 = 1.5 + 1.5 + 1 Punkte).
Seien $m, n \in \mathbb{N}$. Eine Gruppe von n (perfekten) Jägern schießt auf m Enten, wobei sich jeder Jäger sein Opfer zufällig und unabhängig von den anderen Jägern auswählt. Insbesondere kann eine Ente also von mehreren Jägern ausgewählt werden. Sei X die Anzahl der bei diesem Massaker überlebenden Enten.

(a) Berechnen Sie Erwartungswert von X.
Hinweis: *Nummerieren Sie die Enten von 1 bis m und definieren Sie das Ereignis $A_i :=$ "Die i-te Ente überlebt". Drücken Sie X durch die Zufallsvariablen $X_i := \mathbb{1}_{A_i}$ aus. Nutzen Sie dann die Linearität des Erwartungswerts und ermitteln Sie $\mathbb{E}X_i$.*

(b) Berechnen Sie die Varianz von X.
Hinweis: *Benutzen Sie die Formel $\mathbb{V}ar(X) = \mathbb{E}(X^2) - \mathbb{E}(X)^2$. Nun müssen Sie sich Gedanken über den Erwartungswert $\mathbb{E}[X_iX_j]$ machen.*

(b) Sei nun $m = n = 50$. Nutzen Sie die **Tschebyscheff-Ungleichung** (24.08) und die Ergebnisse aus (a), um ein Intervall $[m_1, m_2]$, $m_1, m_2 \in \mathbb{N}$, anzugeben, in dem mit einer Wahrscheinlichkeit von 90% die Anzahl der überlebenden Enten liegt.
Anmerkung: *Wir suchen also ein 90%-Konfidenzintervall.*

Abgabe:
In Zweiergruppen, bis spätestens Donnerstag, den **13. Dezember 2018, 11:15 Uhr**.
(Die Übungszettelkästen sind im 1. OG, INF 205, vor dem Dekanat.)

Homepage der Vorlesung:
`https://sip.math.uni-heidelberg.de/vl/ews-ws18/`