



6. Übungsblatt

Aufgabe 21 (Bedingte Wahrscheinlichkeiten, 4 = 2 + 2 Punkte).

Sei $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ ein Wahrscheinlichkeitsraum.

- (a) Sei $B \in \mathcal{A}$ mit $\mathbb{P}(B) > 0$. Zeigen Sie, dass dann auch

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(\cdot | B) : \mathcal{A} &\longrightarrow [0, 1] \\ A &\longmapsto \mathbb{P}(A | B)\end{aligned}$$

ein Wahrscheinlichkeitsmaß auf (Ω, \mathcal{A}) ist.

- (b) Zeigen Sie, dass im Allgemeinen $\mathbb{P}(A | \cdot)$ für ein $A \in \mathcal{A}$ kein Wahrscheinlichkeitsmaß auf (Ω, \mathcal{A}) ist.

Aufgabe 22 (Formel von Bayes und der totalen W'keit, 4 = 2 + 2 Punkte).

In London regnet es an einem Tag mit Wahrscheinlichkeit $\frac{1}{2}$. Die Wettervorhersage stimmt in $\frac{2}{3}$ aller Fälle^(*). Wenn Regen vorhergesagt ist, nimmt Mr. Pickwick einen Schirm mit; ist kein Regen vorhergesagt, macht er dies mit einer Wahrscheinlichkeit von $\frac{1}{3}$.

- (a) Es regnet. Mit welcher Wahrscheinlichkeit hat Mr. Pickwick keinen Schirm dabei?
(b) Es regnet nicht. Mit welcher Wahrscheinlichkeit hat Mr. Pickwick seinen Schirm dabei?

Bemerkung zu (*): Das bedeutet: wenn es regnet, stimmt die Vorhersage mit Wahrscheinlichkeit $\frac{2}{3}$, und wenn es nicht regnet, stimmt die Vorhersage mit Wahrscheinlichkeit $\frac{2}{3}$.

Hinweis: Definieren Sie zunächst R, V, S als die Ereignisse, dass es regnet, dass die Wettervorhersage stimmt, und dass Mr. Pickwick seinen Schirm mitnimmt. Drücken Sie dann die gesuchten Wahrscheinlichkeiten als bedingte Wahrscheinlichkeiten mit R, V, S aus. Es kann hilfreich sein, zur Übersicht ein Baumdiagramm mit den bekannten Wahrscheinlichkeiten anzufertigen.

Aufgabe 23 (Stochastische Unabhängigkeit, 4 = 1 + 1 + 2 Punkte).

Sei $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ ein Wahrscheinlichkeitsraum, und $A, B, C \in \mathcal{A}$.

- (a) Zeigen Sie, dass die Ereignisse \emptyset und Ω von jedem Ereignis A stochastisch unabhängig sind.
(b) Zeigen Sie: Sind A, B, C gemeinsam stochastisch unabhängig, so sind sowohl $A \cap B$ und C als auch $A \cup B$ und C jeweils stochastisch unabhängig.
(c) Ein Würfel, bei welchem die Augenzahlen von 1 bis 6 gleichwahrscheinlich sind, werde zweimal unabhängig voneinander geworfen. Wir definieren die folgenden Ereignisse:

$$\begin{aligned}A &= \text{"Die erste Augenzahl ist gerade"}, \\ B &= \text{"Die zweite Augenzahl ist gerade"}, \\ C &= \text{"Die Summe der Augenzahlen ist ungerade"}.\end{aligned}$$

Zeigen Sie, dass die Ereignisse A, B, C paarweise stochastisch unabhängig (d.h. immer zwei der Ereignisse sind stochastisch unabhängig), aber nicht gemeinsam stochastisch unabhängig sind.

Aufgabe 24 (Infinite Monkey Theorem - Lemma von Borel-Cantelli, 4 Punkte).

*"Ein Affe, der rein zufällig auf einer Computertastatur tippt,
wird irgendwann einmal auch Goethes Faust schreiben"*

Formalisieren Sie diese Weisheit und geben Sie eine exakte mathematische Begründung mittels des Lemmas von Borel-Cantelli dafür, dass er dies mit Wahrscheinlichkeit Eins sogar unendlich oft tun wird (sofern er unendlich lange lebt).

Abgabe:

In Zweiergruppen, bis spätestens Donnerstag, den **29. November 2018, 11:15 Uhr**.
(Die Übungszettelkästen sind im 1. OG, INF 205, vor dem Dekanat.)

Homepage der Vorlesung:

<https://sip.math.uni-heidelberg.de/vl/ews-ws18/>