



## 5. Übungsblatt

### Aufgabe 17 (Neyman-Pearson-Lemma für stetige Verteilungen, 4 Punkte).

Beweisen Sie das Neyman-Pearson-Lemma aus der Vorlesung:

Sei  $(\mathbb{R}^n, \mathcal{B}^n, (\mathbb{P}_0, \mathbb{P}_1))$  ein (binäres) stetiges statistisches Experiment. Für das Testproblem der einfachen Nullhypothese  $H_0 : \{\mathbb{P}_0\}$  gegen die einfache Alternativhypothese  $H_1 : \{\mathbb{P}_1\}$  ist jeder Neyman-Pearson-Test  $\varphi = \mathbb{1}_{A_k}$  mit kritischem Wert  $k \in \mathbb{R}^+$  und Ablehnbereich

$$A_k = \{x \in \mathbb{R}^n \mid f_1(x) \geq k f_0(x)\}$$

ein **besten Test zum Niveau**  $\mathbb{P}_0(A_k) \in [0, 1]$ .

### Aufgabe 18 (Neyman-Pearson-Lemma, Konfidenzbereiche, $4 = 4 \times 1$ Punkte).

Eine Forschungsgruppe untersucht die Halbwertszeit von  $^{60}\text{Co}$ . Die bisher vermutete Halbwertszeit beträgt  $\lambda_0 = 5.2714$  Jahre. Die Forscher beobachten nun in einem Experiment eine Halbwertszeit von  $X = 13.0$  Jahren.

In ihrem Modell nehmen die Forscher an, dass die Halbwertszeit exponentialverteilt ist mit Parameter  $\frac{1}{\lambda}$  (wobei  $\lambda > 0$ ), d.h.  $X \sim \text{Exp}(\frac{1}{\lambda}) =: \mathbb{P}_\lambda$ . Die Forscher wollen basierend auf ihrer Messung nachweisen, dass die wahre Halbwertszeit größer als die bisher vermutete ist.

- (a) Sei zunächst  $\lambda_1 > \lambda_0$  fest gewählt. Formulieren Sie den Neyman-Pearson-Test  $\varphi : \mathbb{R} \rightarrow \{0, 1\}$  für die  $\mathbb{P}_\lambda$ -Verteilung zu den Hypothesen

$$H_0 : \lambda = \lambda_0 \quad \text{gegen} \quad H_1 : \lambda = \lambda_1$$

zum Niveau  $\alpha \in (0, 1)$ . Vereinfachen Sie dann diesen Test mittels der Technik des monotonen Likelihood-Quotienten.

- (b) Begründen Sie, warum  $\varphi$  aus (a) auch ein gleichmäßig bester Test zum Niveau  $\alpha$  für die Hypothesen

$$H_0 : \lambda \leq \lambda_0 \quad \text{gegen} \quad H'_1 : \lambda > \lambda_0$$

ist.

- (c) Die Forscher wollen den peinlichen Fehler, falsch zu liegen, nur mit einer Wahrscheinlichkeit von 5% begehen. Werden sie sich auf Basis ihrer Beobachtung  $X$  und dem Test  $\varphi$  dazu entscheiden, ihre Ergebnisse zu publizieren?
- (d) Geben Sie einen gleichmäßig besten Konfidenzbereich zum Niveau  $1 - \alpha$  für die falschen Parameter  $F_\lambda = (0, \lambda)$  an.

### Aufgabe 19 (Berechnung MLS, 4 = 2 + 2 Punkte).

Seien  $X_1, \dots, X_n$  identisch verteilte Zufallsvariablen mit gemeinsamer Produktdichte  $f(x_1, \dots, x_n) = \prod_{i=1}^n f_i(x_i)$ , wobei  $f_i$  die Wahrscheinlichkeitsdichte von  $X_i$  sei. Berechnen Sie den zugehörigen Maximum-Likelihood-Schätzer  $\hat{\theta}_n$  für  $\theta$ , falls

- (a)  $X_1 \sim N_{\mu, \sigma^2}$  normalverteilt mit Parametervektor  $\theta = (\mu, \sigma^2)$ ,  
*Hinweis: Sie müssen nicht nachrechnen, dass  $\hat{\theta}_n$  ein globales Minimum/Maximum ist.*
- (b)  $X_1 \sim \text{Bin}_{m,p}$  binomialverteilt mit Parameter  $\theta = p \in (0, 1)$ ,  $m \in \mathbb{N}$  sei hier bekannt.

### Aufgabe 20 (Beispiel: Nichtexistenz MLS, 4 = 3 + 1 Punkte).

Wir wollen die durchschnittliche Anzahl der Zerfälle  $\lambda > 0$  pro Stunde von  $^{60}\text{Co}$  bestimmen. Wir wissen, dass diese Anzahl  $\text{Poi}(\lambda)$ -verteilt ist. Wir haben  $n$ -mal das exakt gleiche  $^{60}\text{Co}$ -Präparat beschafft (d.h. wir können annehmen, dass die gemeinsame Wahrscheinlichkeitsdichte durch die Produktdichte gegeben ist) und führen nun mit jedem Präparat den folgenden Versuch durch ( $i = 1, \dots, n$ ):

Wir halten das Präparat eine Stunde an den Geigerzähler und notieren die Anzahl der Zerfälle  $X_i$ , die er uns anzeigt. Leider entdecken wir erst am Ende unserer Versuchsreihe, dass der Geigerzähler defekt ist und nur noch erkennt, ob in der Stunde überhaupt ein Zerfall geschehen ist oder nicht (d.h. wir beobachten nur  $X_i = 0$  oder  $X_i = 1$ ).

Wir müssen also gezwungenermaßen mit unseren Beobachtungen  $X_1, \dots, X_n$  auskommen. Auch hier können wir annehmen, dass die gemeinsame Dichte der Produktdichte entspricht.

- (a) Zeigen Sie, dass der Maximum-Likelihood-Schätzer  $\hat{\lambda}_n$  für  $\lambda$  basierend auf  $X_1, \dots, X_n$  durch

$$\hat{\lambda}_n = -\log(1 - \overline{X}_n)$$

gegeben ist, sofern er existiert. Hierbei bezeichnet  $\overline{X}_n = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i$ .

*Hinweis: Ist  $X \sim \text{Bin}_{(1,p)}$ , so ist die Zähldichte gegeben durch  $\mathbf{p}_X(k) = p^k \cdot (1-p)^{1-k}$  für  $k \in \{0, 1\}$ .*

- (b) Zeigen Sie, dass der Maximum-Likelihood-Schätzer mit positiver Wahrscheinlichkeit nicht existiert.

---

### Abgabe:

In Zweiergruppen, bis spätestens Donnerstag, den **22. November 2018, 11:15 Uhr**.  
(Die Übungszettelkästen sind im 1. OG, INF 205, vor dem Dekanat.)

### Homepage der Vorlesung:

<https://sip.math.uni-heidelberg.de/v1/ews-ws18/>