Einführung in die
Wahrscheinlichkeitstheorie und Statistik
Prof. Dr. Jan Johannes
Sandra Schluttenhofer
Wintersemester 2018/19

UNIVERSITÄT HEIDELBERG
ZUKUNFT SEIT 1386

2. Übungsblatt

Aufgabe 5 (Dynkin-Systeme, 4 = 2 + 2 Punkte).

(a) Es seien $n \in \mathbb{N}$ und Ω eine endliche Menge mit $|\Omega| = 2n$. Zeigen Sie, dass
$$\mathcal{D} := \{A \subseteq \Omega : |A| \text{ gerade } \}$$
ein Dynkin-System ist.

(b) Zeigen Sie, dass $\mathcal{D}$ jedoch für $n \geq 2$ **keine** σ-Algebra ist.

Aufgabe 6 (Eindeutigkeit von Wahrscheinlichkeitsmaßen, 4 = 2 + 2 Punkte).

(a) Beweisen Sie Satz 03.18 **(Maßeindeutigkeitssatz)** aus dem Skript mit Hilfe der Beweisstrategie 03.17:
Seien $(\Omega, \mathcal{A})$ ein messbarer Raum, $\mathcal{E}$ ein $\cap$-stabiler Erzeuger von $\mathcal{A}$ und $\mathbb{P}_1$, $\mathbb{P}_2$ Wahrscheinlichkeitsmaße auf $\mathcal{A}$. Es gelte
$$\mathbb{P}_1(E) = \mathbb{P}_2(E) \qquad \forall E \in \mathcal{E}.$$
Zeigen Sie, dass dann schon $\mathbb{P}_1 = \mathbb{P}_2$ folgt.

(b) Sei nun $\Omega = \{a, b, c, d\}$ und $\mathcal{E} = \{A, C\}$ mit $A = \{a, b\}$ und $C = \{b, c\}$. Zeigen Sie, dass $A(\mathcal{E}) = \mathcal{P}(\Omega)$ und dass zwei nicht-identische Wahrscheinlichkeitsmaße $\mathbb{P}_i$ auf $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega))$ existieren mit
$$\mathbb{P}_1(E) = \mathbb{P}_2(E) \quad \text{für alle } E \in \mathcal{E}.$$
Warum ist der Maßeindeutigkeitssatz aus (a) hier nicht anwendbar?

Aufgabe 7 (Negative Binomialverteilung, 4 = 3 + 1 Punkte).

(a) Sei $\Omega = \mathbb{N}_0$, $\mathcal{A} = \mathcal{P}(\mathbb{N}_0)$ und $\mathbb{p} : \Omega \longrightarrow [0, 1]$ für $p \in (0, 1)$, $r \in \mathbb{N}$, $\omega \in \Omega$ gegeben durch
$$\mathbb{p}(\omega) = \binom{\omega + r - 1}{\omega} p^r (1-p)^\omega.$$
Zeigen Sie, dass $\mathbb{p}$ eine Zähldichte eines Wahrscheinlichkeitsmaßes auf $(\Omega, \mathcal{A})$ ist, d.h. zeigen Sie: $\sum_{\omega \in \Omega} \mathbb{p}(\omega) = 1$.
Was kann mit Hilfe dieser Zähldichte modelliert werden?
***Anleitung**: Zeigen Sie die Regel* $\binom{\alpha+k-1}{k} = (-1)^k \binom{-\alpha}{k}$ *für den verallgemeinerten Binomialkoeffizienten* $\binom{\alpha}{k} := \frac{\alpha \cdot (\alpha-1) \cdot \ldots \cdot (\alpha-(k-1))}{k!}$*, der für* $\alpha \in \mathbb{Z}$ *und* $k \in \mathbb{N}_0$ *definiert ist. Beweisen Sie dann, dass für die binomische Reihe* $(1+x)^\alpha = \sum_{k=0}^\infty \binom{\alpha}{k} x^k$ *gilt, wobei* $\alpha \in \mathbb{Z}$*,* $x \in (-1, 1)$.

(b) Nach langjähriger Erfahrung wissen Sie, dass Sie bei einer Runde Skat mit Wahrscheinlichkeit $p = 0.2$ gewinnen. Sie sind nun zu einem Spieleabend eingeladen worden, bei dem ausschließlich Skat gespielt wird. Wie hoch ist die Wahrscheinlichkeit, dass Sie genau beim 30. Spiel zum sechsten Mal gewinnen?

Aufgabe 8 (Binomialapprox. der Hypergeometrischen Vtlg, $4 = 2 + 1 + 1$ Punkte).

(a) Man zeige, dass sich die Zähldichte der hypergeometrischen Verteilung mit Parametern (N, M, n) für $N, M \to \infty$ und $M/N \to p$ durch die Zähldichte der Binomialverteilung mit Parametern (n, p) approximieren lässt.

(b) In einem See befinden sich 1000 Fische, von denen 200 Karpfen sind. Es werden nun (unabhängig voneinander) 10 Fische gefangen. Wie hoch ist die Wahrscheinlichkeit, dass darunter mindestens 2 Karpfen sind? Geben Sie einmal die exakte Wahrscheinlichkeit an, und einmal die Wahrscheinlichkeit unter Nutzung der Approximation aus (a).

(c) Ein Insekt legt 100 Eier, die sich unabhängig voneinander entwickeln. Aus jedem Ei schlüpft mit Wahrscheinlichkeit 0.01 ein Nachkomme. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass es mindestens 2 Nachkommen gibt? Geben Sie einmal die exakte Wahrscheinlichkeit an, und einmal die Wahrscheinlichkeit unter Nutzung der Approximation durch eine Poisson-Verteilung (vgl. **Poissonscher Grenzwertsatz** 04.07).

Abgabe:
In Zweiergruppen, bis spätestens Mittwoch, den **31. Oktober 2018, 18:00 Uhr**.
(Die Übungszettelkästen sind im 1. OG, INF 205, vor dem Dekanat.)

Homepage der Vorlesung:
`https://sip.math.uni-heidelberg.de/vl/ews-ws18/`