Einführung in die
Wahrscheinlichkeitstheorie und Statistik
Prof. Dr. Jan Johannes
Sandra Schluttenhofer
Wintersemester 2018/19

UNIVERSITÄT
HEIDELBERG
ZUKUNFT
SEIT 1386

11. Übungsblatt

Aufgabe 40 (Rechenregeln für stochastische Konvergenz, 2 = 1.5 + 0.5 Punkte).
Sei $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ ein Wahrscheinlichkeitsraum.

(a) **Continuous Mapping Theorem für zwei Komponenten:**
Für $n \in \mathbb{N}$ seien $Y_n, Z_n : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ Zufallsvariablen und $y, z \in \mathbb{R}$ deterministische Konstanten mit $Y_n \xrightarrow{\mathbb{P}} y$ und $Z_n \xrightarrow{\mathbb{P}} z$. Sei $h : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ eine in (y, z) stetige Funktion. Zeigen Sie, dass dann $h(Y_n, Z_n) \xrightarrow{\mathbb{P}} h(y, z)$ folgt.

Hinweis: *Nutzen Sie die ε-δ-Definition der Stetigkeit von h mit den Normen $\|\cdot\|_1$ (1-Norm) und $|\cdot|$ (Betrag).*

(b) Für $n \in \mathbb{N}$ seien $X_n, Y_n : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ Zufallsvariablen und $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge reeller Zahlen sowie $a, x, y \in \mathbb{R}$. Zeigen Sie:

$$X_n \xrightarrow{\mathbb{P}} x, \quad Y_n \xrightarrow{\mathbb{P}} y, \quad a_n \to a \quad \Longrightarrow \quad a_n \cdot X_n + Y_n \xrightarrow{\mathbb{P}} a \cdot x + y.$$

Aufgabe 41 (Fast-sichere und stochastische Konvergenz, 2 Punkte).
Es sei $(\Omega, 2^{\Omega}, \mathbb{P})$ ein diskreter Wahrscheinlichkeitsraum. Weisen Sie nach, dass für Zufallsvariablen auf diesem Raum $\mathbb{P}$-fast sichere Konvergenz und $\mathbb{P}$-stochastische Konvergenz übereinstimmen.

Aufgabe 42 (Stochastische Konvergenz und Konvergenz in $\mathscr{L}_2$, 4 = 2 + 2 Punkte).
Sei $U \sim \mathrm{Exp}_1$ eine exponentialverteilte Zufallsvariable mit Parameter 1 und $V \sim \mathrm{Par}_{(1,1)}$ eine Pareto-verteilte Zufallsvariable mit stetiger Wahrscheinlichkeitsdichte

$$f^V(v) = \frac{1}{v^2} \mathbb{1}_{[1,\infty)}(v),$$

und $X_n := n \cdot \mathbb{1}_{[n,\infty)}(U)$ sowie $Y_n := \sqrt{n} \cdot \mathbb{1}_{[n,\infty)}(V)$ für $n \in \mathbb{N}$.

(a) Überprüfen Sie, ob $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(Y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ stochastisch gegen einen Grenzwert konvergieren.

(b) Überprüfen Sie, ob $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(Y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ im quadratischen Mittel (d.h. in $\mathscr{L}_2$) gegen einen Grenzwert konvergieren.

Aufgabe 43 (Stochastische Konvergenz und $\mathscr{L}_2$-Konvergenz, 4 = 2 + 1 + 1 Punkte).

In dieser Aufgabe untersuchen wir die Beziehung zwischen den beiden Konvergenzarten $\xrightarrow{\mathscr{L}_2}$ (im quadratischen Mittel) und $\xrightarrow{\mathbb{P}}$ (stochastisch).
Sei $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ ein Wahrscheinlichkeitsraum und für $n \in \mathbb{N}$ seien $X_n, X : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ Zufallsvariablen.

(a) Sei $U \sim U_{[0,1]}$ gleichverteilt auf dem Intervall $[0,1]$ und $X_n := \sqrt{n} \cdot \mathbb{1}_{[0,\frac{1}{n}]}(U)$. Zeigen Sie, dass $X_n \xrightarrow{\mathbb{P}} 0$, aber nicht $X_n \xrightarrow{\mathscr{L}_2} 0$ gilt.

(b) Es gelte $X_n \xrightarrow{\mathbb{P}} X$ und es gebe $\alpha > 0$ mit $\limsup_{n\to\infty} \mathbb{E}[|X_n|^{2+\alpha}], \mathbb{E}[|X|^{2+\alpha}] < \infty$. Zeigen Sie, dass dann folgt: $X_n \xrightarrow{\mathscr{L}_2} X$.
Hinweis: *Nutzen Sie* $1 = \mathbb{1}_{\{|X_n - X| > \varepsilon\}} + \mathbb{1}_{\{|X_n - X| \leq \varepsilon\}}$ *und die Hölder-Ungleichung für Erwartungswerte: Sind* $Y, Z : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ *Zufallsvariablen, so gilt für* $p, q > 0$ *mit* $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$*:* $\mathbb{E}[|Y \cdot Z|] \leq \mathbb{E}[|Y|^p]^{1/p} \cdot \mathbb{E}[|Z|^q]^{1/q}$.

(c) Zeigen Sie, dass die X_n, X aus (a) die Bedingungen aus (b) nicht erfüllen.

Aufgabe 44 (Anwendung des SGGZ, 4 = 1 + 1 + 2 Punkte).

Ein Spieler startet mit dem Anfangskapital $K_0 = 1$. Bei jeder Runde setzt er sein gesamtes Kapital ein. Es wird eine faire Münze geworfen, bei *Kopf* erhält er den anderthalbfachen Einsatz zurück, bei *Zahl* nur den halben.

(a) Stellen Sie das Kapital nach der n-ten Runde als $K_n = \prod_{i=1}^{n} R_i$ mit geeigneten unabhängigen Zufallsvariablen R_i dar.

(b) Weisen Sie nach, dass das Spiel fair ist in dem Sinne, dass $\mathbb{E}(K_n) = 1$ für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt.

(c) Zeigen Sie, dass trotzdem $\lim_{n\to\infty} K_n = 0$ fast sicher gilt.
Hinweis*: Betrachten Sie* $\log(K_n)$.

Abgabe:
In Zweiergruppen, bis spätestens Donnerstag, den **17. Januar 2019, 11:15 Uhr**.
(Die Übungszettelkästen sind im 1. OG, INF 205, vor dem Dekanat.)

Homepage der Vorlesung:
`https://sip.math.uni-heidelberg.de/vl/ews-ws18/`