Einführung in die
Wahrscheinlichkeitstheorie und Statistik
Prof. Dr. Jan Johannes
Sandra Schluttenhofer
Wintersemester 2018/19

UNIVERSITÄT HEIDELBERG
ZUKUNFT SEIT 1386

10. Übungsblatt

Aufgabe 36 (Erwartungstreue Schätzer, 4 = 1 + 0.5 + 1 + 1.5 Punkte).
In dieser Aufgabe rekapitulieren wir Beispiel 26.16 (a) und Beispiel 26.18 (a) aus der Vorlesung.

Sei $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ ein Wahrscheinlichkeitsraum, $n \in \mathbb{N}$ und $X_1, ..., X_n : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ unabhängig und identisch, stetig verteilte Zufallsvariablen mit Verteilungsfunktion F^X.
Seien $M_1 := \min(X_1, ..., X_n)$ und $M_2 := \max(X_1, ..., X_n)$.

(a) Zeigen Sie, dass die Verteilungsfunktionen von M_1 und M_2 gegeben sind durch

$$F^{M_1}(z) = 1 - (1 - F^X(z))^n \qquad \text{und} \qquad F^{M_2}(z) = F^X(z)^n.$$

Hinweis: *Finden Sie eine zu* $\max(x_1, ..., x_n) \leq z$ *äquivalente Aussage, die Bedingungen an die einzelnen* x_i *stellt.*

(b) Sei $X_1 \sim \text{Exp}_\lambda$ exponentialverteilt mit Parameter $\lambda > 0$. Welche bekannte Verteilung besitzt M_1?

(c) Sei nun $X_1 \sim U_{[0,\theta]}$ gleichverteilt auf $[0, \theta]$ mit Parameter $\theta > 0$.

- Bestimmen Sie $\mathbb{E}_\theta(X_1)$ und $\mathbb{V}\text{ar}_\theta(X_1)$.
- Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeitsdichte f_{M_2} von M_2 und berechnen Sie $\mathbb{E}_\theta(M_2)$.

(d) Wir betrachten nun zwei Schätzer für den Parameter θ: den Momentschätzer $\hat{\theta}_1 = 2\overline{X_n}$ und den Maximum-Likelihood-Schätzer $\hat{\theta}_2 = \max(X_1, \ldots, X_n)$. Zeigen Sie, dass

- $\hat{\theta}_1$ ein erwartungstreuer Schätzer für θ ist, und dass
- $\hat{\theta}_2$ nicht erwartungstreu ist.

Wir können den Maximum-Likelihood-Schätzer korrigieren, indem wir stattdessen $\hat{\theta}_3 = \frac{n+1}{n}\hat{\theta}_2$ betrachten. Zeigen Sie, dass für $n > 1$

- der korrigierte Maximum-Likelihood-Schätzer $\hat{\theta}_3$ effizienter ist als der Momentschätzer $\hat{\theta}_1$.

Bestimmen Sie nun für alle drei Schätzer den mittleren quadratischen Fehler. Welcher der drei Schätzer ist der beste bzgl. des MSE?

Aufgabe 37 (Momente von χ^2_n- und t_n-Verteilung, 4 = 2 + 1 + 1 Punkte).

(a) Sei $n > 2$ und $X \sim t_n$ t-verteilt mit n Freiheitsgraden, d.h. X besitzt die Wahrscheinlichkeitsdichte $f_n(x) = c_n \cdot \left(1 + \frac{x^2}{n}\right)^{-\frac{n+1}{2}}$ mit $c_n := \frac{\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)}{\sqrt{n\pi}\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}$.
Zeigen Sie: $\mathbb{E}[X] = 0$, $\mathbb{V}\mathrm{ar}(X) = \frac{n}{n-2}$.
Hinweis: *Verwenden Sie Symmetrie-Argumente für den Erwartungswert und partielle Integration mit dem "Trick" $\int_{\mathbb{R}} x^2 f_X(x)\ dx = \int_{\mathbb{R}} x \cdot x f_X(x)\ dx$, um eine Gleichung der Form $\mathbb{E}(X^2) = C_1 + C_2 \cdot \mathbb{E}[X^2]$ zu erhalten. Diese kann nach $\mathbb{E}(X^2)$ aufgelöst werden.*

Für eine Zufallsvariable X sei nun, falls der Erwartungswert existiert, $m_X(t) := \mathbb{E}(e^{tX})$, $(t \in \mathbb{R})$ die momenterzeugende Funktion. Falls der Erwartungswert für ein $t \in \mathbb{R}$ existiert, können wir den Exponentialterm in eine Potenzreihe entwickeln und erhalten

$$m_X(t) = \mathbb{E}(e^{tX}) = \mathbb{E}\left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(tX)^n}{n!}\right) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n}{n!}\mathbb{E}(X^n).$$

Wir können also das k-te Moment einer Zufallsvariable X bestimmen, indem wir die k-te Ableitung der momenterzeugenden Funktion an der Stelle 0 betrachten:

$$\frac{\mathrm{d}^k}{\mathrm{d}t^k} m_X(t)\ |_{t=0} = \mathbb{E}(X^k).$$

(b) Sei $Y \sim N_{(0,1)}$ und $X = Y^2$. Zeigen Sie, dass $m_X(t) = (1-2t)^{-\frac{1}{2}}$ für $t < \frac{1}{2}$.

(c) Sei $X \sim \chi^2_n$ Chi-Quadrat-verteilt mit n Freiheitsgraden. Berechnen Sie $m_X(t)$ für $t < \frac{1}{2}$.

Aufgabe 38 (t-Test für den Erwartungswert, 4 = 1.5 + 1.5 + 1 Punkte).

Auf der Packung eines Feuerwerks der Marke "Superböller" steht geschrieben, dass die durchschnittliche Lautstärke höchstens $\mu_0 = 100$ Dezibel beträgt. Wie sind skeptisch und vermuten, dass die durchschnittliche Lautstärke höher ist. Dies wollen wir dem Hersteller nachweisen. Dazu nehmen wir an, dass die Lautstärke beim Abbrennen eines Böllers normalverteilt ist mit Erwartungswert $\mu \in \mathbb{R}$ (entspricht der durchschnittlichen Lautstärke) und unbekannter Standardabweichung $\sigma > 0$. Unter strenger Aufsicht zünden wir nun $n = 10$ der "Superböller"-Feuerwerke unabhängig voneinander an und messen folgende Lautstärken (in Dezibel):

112.0	105.2	98.1	108.7	97.2	102.3	110.1	100.5	103.3	99.0

(a) Formulieren Sie zunächst die Hypothesen für das Testproblem, so dass der Fehler 1. Art dem peinlichen Irrtum entspricht, dass wir den Hersteller zu Unrecht beschuldigen. Führen Sie dann einen Student'schen t-Test (Satz 26.36) zum Niveau $\alpha = 0.05$ durch und formulieren Sie das Ergebnis der Testentscheidung.

(b) Sei $\alpha \in (0,1)$. Seien $X_1, ..., X_n \overset{\text{iid}}{\sim} N_{(\mu,\sigma^2)}$. Sei $\overline{X_n} := \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n X_i$ der Mittelwert und $S^2 := \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^n (X_i - \overline{X_n})^2$ die empirische Stichprobenvarianz. Zeigen Sie, dass das Intervall

$$B(X_1, ..., X_n) := \left[\overline{X_n} - \frac{S}{\sqrt{n}} t_{n-1,1-\frac{\alpha}{2}}, \overline{X_n} + \frac{S}{\sqrt{n}} t_{n-1,1-\frac{\alpha}{2}}\right]$$

ein $(1-\alpha)$-Konfidenzintervall für μ ist.

(c) Geben Sie ein 95%-Konfidenzintervall für die durchschnittliche Lautstärke μ des Feuerwerks "Superböller" basierend auf unseren Beobachtungen an.

Hinweis: *Hier sind einige Quantile der t-Verteilung:* $t_{9,0.95} = 1.833$, $t_{10,0.95} = 1.812$, $t_{9,0.975} = 2.262$, $t_{10,0.975} = 2.228$.

Aufgabe 39 (t-Test auf Gleichheit der Erwartungswerte, 4 = 1 + 2 + 1 Punkte).

Laut dem Händler eines Feuerwerkgeschäfts fliegen die Raketen des Typs "Barock" mindestens genauso hoch wie Raketen des Typs "Renaissance". Wir wollen diese Aussage überprüfen und kaufen dazu 8 "Barock"- und 12 "Renaissance"-Raketen. Für unsere Nachforschung nehmen wir an, dass für beide Typen die Flughöhe normalverteilt ist mit einer mittleren Flughöhe μ_B ("Barock") bzw. μ_R ("Renaissance") und gleicher, unbekannter Standardabweichung $\sigma > 0$. Wir messen folgende Flughöhen (in Metern) bei unseren Raketen:

"Barock"	39.7	47.5	37.4	46.6	40.2	48.4	39.0	37.2				
"Renaissance"	47.0	39.2	45.5	38.7	43.0	43.1	40.4	45.0	43.4	48.6	45.7	43.8

Führen Sie einen Zweistichproben t-Test (Satz 13.11) zum Niveau $\alpha = 0.05$ durch und entscheiden Sie, ob wir dem Händler bzgl. der Flughöhe der beiden Raketentypen vertrauen sollten oder nicht. Hierbei sollte der Fehler 1. Art dem peinlichen Fehler entsprechen, dem Händler zu misstrauen, obwohl er Recht hat.
Hinweis: *Quantile der t-Verteilung:* $t_{18,0.95} = 1.734$, $t_{19,0.95} = 1.729$, $t_{20,0.95} = 1.725$.

$$\begin{gathered}
\spadesuit \\
\pm \\
\gg\ll \\
\gg \heartsuit \ll \\
\Uparrow\gg\gg\ll\ll\Uparrow \\
>\gg\gg \diamondsuit \ll\ll< \\
\gg\gg\ll\ll \\
\gg\gg \circ \ll\ll \\
\gg \between \gg\ll \partial \ll \\
\gg\gg\gg \infty \ll\ll\ll\ll \\
\Uparrow\gg \oplus \gg\gg\ll\ll\curvearrowleft\ll\Uparrow \\
>\gg\gg\gg\gg \Theta \ll\ll\ll\ll< \\
\gg \odot \gg\gg\ll\ll \int \ll \\
\gg\gg\gg\gg\bowtie\ll\ll\ll\ll \\
\gg\gg \Omega \gg\gg\ll\ll \delta \ll \\
\Uparrow\gg\gg\gg\gg\gg \otimes \ll\ll\ll\ll\ll\Uparrow \\
>\gg\gg \cap \gg\gg\gg\ll \S \ll\ll \copyright \ll< \\
\| \\
\Longleftrightarrow
\end{gathered}$$

Ein frohes Weihnachtsfest und einen guten Rutsch ins neue Jahr!

Abgabe:
In Zweiergruppen, bis spätestens Donnerstag, den **10. Januar 2019, 11:15 Uhr**.
(Die Übungszettelkästen sind im 1. OG, INF 205, vor dem Dekanat.)

Homepage der Vorlesung:
`https://sip.math.uni-heidelberg.de/vl/ews-ws18/`